

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

TESIS DE MAGÍSTER

**DESARROLLO DE UN MODELO REDUCIDO
PARA EL ANÁLISIS DE CAMPOS DIFUSOS EN
SISTEMAS ESTRUCTURALES LINEALES**

Autor:
NATALY ALEJANDRA
MANQUE ROA

Profesores guía:
MARCOS ALBERTO
VALDEBENITO CASTILLO

*Tesis realizada acorde a los requerimientos para el grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería, mención INGENIERÍA CIVIL
de la*

Facultad de Ingeniería y Ciencias

11 de agosto de 2022

UAI

FACULTAD DE
INGENIERÍA Y
CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

Resumen

Facultad de Ingeniería y Ciencias

Magíster en Ciencias de la Ingeniería, mención INGENIERÍA CIVIL

DESARROLLO DE UN MODELO REDUCIDO PARA EL ANÁLISIS DE CAMPOS DIFUSOS EN SISTEMAS ESTRUCTURALES LINEALES

por NATALY ALEJANDRA MANQUE ROA

En ingeniería estructural, el estudio de un determinado sistema se realiza por medio de modelos numéricos. Habitualmente, este proceso se efectúa mediante modelos de elementos finitos (MEF). Para implementar un MEF, se requiere alimentar el modelo con parámetros de entrada que contienen información de las características del sistema en estudio. No obstante, en la práctica muchas veces existe *incertidumbre* sobre estos parámetros de entrada y, por ende, la caracterización del desempeño del modelo se vuelve compleja.

Ante dicho problema, esta tesis explora dos desafíos. El primer desafío corresponde a cuantificar parámetros inciertos que pueden depender de alguna coordenada espacial, es decir, que varíen en función del espacio. Para sortear este desafío, se describió esta incertidumbre mediante *campos difusos*. La estrategia propuesta permite incorporar la dependencia espacial durante la etapa de cuantificación de los parámetros de entrada y, por la manera en que está formulada, resulta una opción ideal en aquellos casos que se cuenta con escasa información, escenario suele ser común en ingeniería estructural.

El segundo desafío trabajado en esta propuesta consistió en propagar dicha incertidumbre de forma eficiente. Esto se debe a que, tanto la etapa de modelización como de resolución del sistema, conlleva un costo numérico elevado. Para atacar este problema, se utilizó un modelo aproximado correspondiente a un *modelo de orden reducido*, que sustituyó al MEF original. La ventaja de este modelo es que permite proyectar el sistema de ecuaciones asociado a la estructura original, en una base de menor dimensión, disminuyendo considerablemente los tiempos de cómputo. Para asegurar la veracidad de la aproximación, se presenta una estrategia de actualización de la base reducida que permite mantener el error bajo un determinado umbral.

La propuesta fue aplicada en dos sistemas lineales sencillos, en una y dos dimensiones. Los resultados demostraron que se puede obtener una estimación precisa de la respuesta difusa del sistema con un menor esfuerzo numérico, controlando la calidad de los resultados.

Palabras clave: Cuantificación de la Incertidumbre, Campos Difusos, Modelo de Orden Reducido.

Agradecimientos

Al finalizar esta hermosa etapa, considero más que nunca que la vida se trata de elecciones, oportunidades y cambios.

Quiero expresar mi gratitud a mi familia. A mis padres, Vicky y José, mi amor por la educación nació de ustedes y de los valores que siempre me inculcaron. Gracias por creer en mí siempre, y estar conmigo en cada momento. A mi hermano Seba, por ser un pilar fundamental en mi vida. A mi amor Benjamin, por ser un compañero incondicional en esta experiencia. Gracias a todos por llenar mis días de alegría, disfrutar cada uno de mis logros y apoyar mis decisiones. Los amo.

A mi prof. guía Marcos Valdebenito, muchísimas gracias por sus enseñanzas, apoyo y dedicación en mi formación. Gracias por motivarme a ser una mejor persona y profesional, por entregarme desafíos y oportunidades. Estoy profundamente agradecida por la oportunidad que me ha brindado para hacer lo que me apasiona. Ha sido una experiencia invaluable aprender de usted.

A la Facultad de Ingeniería y Ciencias (FIC) de la Universidad Adolfo Ibáñez (UAI) y al Instituto Francés de Chile, por otorgarme una beca para realizar una estadía corta de investigación en SIGMA-Clermont.

Al prof. Pierre Beaurepaire por acogerme en el centro SIGMA-Clermont y por su aporte a esta tesis durante mi estadía. Muchas gracias por darme un espacio para desarrollar y compartir mi trabajo. También me gustaría agradecer al prof. Matthias Faes por su interés y valiosos comentarios a este estudio.

Finalmente, agradezco profundamente a la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) a través del programa Beca Nacional de Magíster 2021 22211164, y a la FIC por haber financiado mis estudios de magíster.

Índice general

Resumen	I
Agradecimientos	II
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Descripción del problema	1
1.2. Objetivo General	3
1.3. Objetivos Específicos	3
1.4. Estructura	4
2. ANÁLISIS DIFUSO	5
2.1. Introducción	5
2.2. Variables difusas	5
2.3. Respuesta estructural difusa de sistemas lineales	9
2.4. Estrategias para cuantificar la respuesta difusa de sistemas estructurales	13
2.4.1. Estrategias mediante aritmética de intervalos	13
2.4.2. Enfoque de optimización directa	15
2.4.3. Estrategias mediante modelos sustitutos	15
2.4.3.1. Expansión con series de Taylor	15
2.4.3.2. Redes neuronales	17
2.4.3.3. Modelos de base reducida	18
2.4.4. Método de transformación	19
2.5. Conclusiones del Capítulo 2	20
3. APROXIMACIÓN DE LA RESPUESTA MEDIANTE CAMPOS DIFUSOS	21
3.1. Introducción	21
3.2. Campos difusos	21
3.3. Discretización del campo difuso	24
3.4. Respuesta estructural difusa de sistemas lineales con incertidumbre espacial	28
3.5. Estrategias para cuantificar la respuesta difusa de sistemas lineales bajo campos difusos	29
3.5.1. Optimización directa	30
3.5.2. Método del vértice	31
3.6. Conclusiones del Capítulo 3	32
4. APROXIMACIÓN DE LA RESPUESTA MEDIANTE MODELOS REDUCIDOS	33
4.1. Introducción	33
4.2. Formulación del modelo de orden reducido considerando campos difusos	34

4.2.1.	Respuesta estructural difusa de sistemas lineales considerando un modelo de orden reducido	34
4.2.2.	Construcción de la base reducida	35
4.2.3.	Estimación del error	37
4.3.	Estimación de la respuesta difusa	38
4.3.1.	Optimización considerando el modelo de orden reducido . . .	38
4.3.2.	Optimización con enriquecimiento de la base	41
4.4.	Conclusiones del Capítulo 4	43
5.	EJEMPLOS	44
5.1.	Pilote sobre fundación elástica	44
5.1.1.	Descripción del sistema estructural	44
5.1.2.	Solución considerando $\varepsilon_t \rightarrow \infty$	46
5.1.3.	Solución considerando $\varepsilon_t = 10^{-4}$	48
5.2.	Flujo en medio poroso	49
5.2.1.	Descripción del sistema estructural	49
5.2.2.	Solución considerando $\varepsilon_t \rightarrow \infty$	52
5.2.3.	Solución considerando $\varepsilon_t = 10^{-4}$	53
5.3.	Conclusiones del Capítulo 5	55
6.	CONCLUSIONES	56

Índice de figuras

2.1. Ejemplo de funciones de pertenencia discreta y continua.	6
2.2. Conjuntos difusos convexos y no convexos.	7
2.3. Ejemplos de funciones de pertenencia, donde $\mu_{\tilde{\theta}_1}$ representa una variable de la que se tiene mucha información y $\mu_{\tilde{\theta}_2}$ representa una variable de la que se tiene poca información.	8
2.4. Representación esquemática de intervalo asociado a una variable difusa para un valor específico de pertenencia, a través de cortes α	9
2.5. Enfoques determinista y difuso para la respuesta en desplazamiento de una viga en voladizo a la que se aplica una carga θ^0 en su borde libre.	10
2.6. Representación gráfica de la discretización para un nivel de pertenencia α	12
2.7. Esquema de discretización α	12
2.8. A la izquierda, aproximación de primer orden. A la derecha, aproximación de segundo orden con series de Taylor para el punto de expansión (θ^0).	16
2.9. Tipos de redes neuronales. a) Red de Base Radial (RBN). b) Redes Neuronales de Avance Profundo (DFF). c) Red Neuronal Recurrente (RNN).	18
2.10. Esquema metodológico del enfoque de transformación para un nivel de pertenencia α_j , aplicado a dos variables difusas $\tilde{\theta}_1$ y $\tilde{\theta}_2$, con una función de respuesta $r(\cdot)$, para el cálculo de la respuesta difusa $\tilde{r}$	20
3.1. Representación esquemática de las funciones de pertenencia para la variable difusa $\tilde{\xi}$	22
3.2. Representación esquemática del campo de intervalo resultante para un nivel de pertenencia α para el campo difuso $\tilde{\xi}$, considerando dos nodos.	23
3.3. Arriba, ilustración del esquema de interpolación del inverso de la distancia para $p = 2$, considerando el campo resultante al utilizar 2 intervalos escalares. Abajo, resultado de las funciones base interpoladas para 2 puntos de control en el dominio.	24
3.4. Discretización del espacio Ω . a) Discretización unidimensional (1D) de una viga en voladizo con elementos finitos de dos nodos. b) Discretización de un elemento bidimensional (2D) con elementos finitos de 4 nodos.	25
3.5. Representación esquemática de la proyección del campo de intervalo resultante para un nivel de pertenencia α , para el campo difuso $\tilde{\xi}$, considerando dos nodos con información y un elemento finito 1D representado por su centroide.	27

3.6. Esquema metodológico del método del vértice para un nivel de pertenencia α , aplicado a la variable difusa θ_1 y al campo difuso $\tilde{\xi}_{b,1}$, considerando una función de respuesta $r(\cdot)$ monótona, para el cálculo de la respuesta difusa $\tilde{r}$	31
4.1. Metodología general del algoritmo de optimización Particle Swarm. (1) Posición actual. (2) Búsqueda de la nueva posición. (3) Selección de la nueva posición.	39
4.2. Esquema del procedimiento de optimización. (a) Descripción gráfica de la construcción de la función de pertenencia de la respuesta. (b) Comportamiento del error. (c) Búsqueda del óptimo con el algoritmo de optimización para los niveles α_1 y α_2	40
4.3. Esquema del procedimiento de enriquecimiento de la base reducida. (a) Descripción gráfica del proceso de optimización. (b) Esquema del monitoreo del error. (c) Actualización de la base reducida.	42
5.1. Esquema del problema de aplicación. (a) Descripción general. (b) Modelo estructural.	44
5.2. Funciones de pertenencia asociadas a las variables difusas consideradas: módulo de elasticidad, inercia y carga.	45
5.3. Campo difuso asociado al balasto.	45
5.4. Grados de libertad asociados a un elemento finito del modelo. u_1 y u_3 corresponden al desplazamiento horizontal del elemento; u_2 y u_4 corresponden al giro.	46
5.5. Función de pertenencia de la respuesta de desplazamiento en el extremo superior del pilote, considerando $\varepsilon_t \rightarrow \infty$	47
5.6. Comportamiento del error considerando $\varepsilon_t \rightarrow \infty$	47
5.7. Función de pertenencia de la respuesta de desplazamiento en el extremo superior del pilote, considerando $\varepsilon_t = 10^{-4}$	48
5.8. Comportamiento del error considerando $\varepsilon_t = 10^{-4}$	49
5.9. Análisis adicionales requeridos cuando $\varepsilon_t = 10^{-4}$	49
5.10. Malla de elementos finitos utilizada y ubicación de los puntos de control.	50
5.11. Funciones de pertenencia asociadas a las permeabilidades en cada punto de control. Cada punto se ubican en: (A) $x = 30$ [m], $y = 4.5$ [m]. (B) $x = 30$ [m], $y = 15$ [m]. (C) $x = 75$ [m], $y = 2$ [m]. (D) $x = 75$ [m], $y = 9$ [m].	51
5.12. Función de pertenencia de la respuesta de flujo a la salida de la presa, considerando $\varepsilon_t = \infty$	52
5.13. Comportamiento del error considerando $\varepsilon_t = \infty$	53
5.14. Función de pertenencia de la respuesta de flujo a la salida de la presa, considerando $\varepsilon_t = 10^{-4}$	54
5.15. Comportamiento del error considerando $\varepsilon_t = 10^{-4}$	54
5.16. Análisis adicionales requeridos cuando $\varepsilon_t = 10^{-4}$	55

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Descripción del problema

El estudio de sistemas estructurales en ingeniería civil requiere del procesamiento de una gran cantidad de parámetros de entrada. Estos permiten predecir la respuesta de interés frente a las solicitaciones a las que se verá sometida la estructura una vez construida, por medio de la etapa de modelización. Específicamente, estos parámetros de entrada incorporan las características del lugar de emplazamiento de la obra, materiales utilizados, dimensiones de los elementos, tipos y condiciones de carga, entre otros. Por ende, durante este período se requiere caracterizar una gran cantidad de variables. Sin embargo, la cuantificación de estos parámetros no siempre es sencilla debido a la *incertidumbre* [1] que existe respecto de su valor. En este contexto, se distinguen dos grupos diferentes de variables según la incertidumbre existente. El primero de ellos agrupa parámetros respecto de los cuales puede existir desconocimiento sobre su magnitud, es decir, sólo se conoce el rango dentro del cual fluctúan. En este caso, se encuentran por ejemplo, las variaciones evidenciadas en los ensayos para obtener la resistencia mecánica máxima de los materiales, tal como el hormigón y acero estructural [2], puesto que bajo el mismo diseño experimental es posible obtener valores diferentes para caracterizar estos parámetros. Esta clasificación comúnmente es tratada como *incertidumbre aleatoria*, vale decir, puede surgir producto de la naturaleza propia de cada variable [1].

En el otro grupo, en cambio, se encuentran parámetros sobre los que existe desconocimiento acerca de su valor real debido a una potencial deficiencia de los actuales sistemas de medición y/o modelización, por lo que agrupa incertezas que se pueden reducir en función de la información disponible. En esta categoría tiene lugar, por ejemplo, la caracterización de las propiedades geomécnicas del suelo de fundación utilizadas para el diseño de sistemas de grupos de pilotes o pilotes de gran diámetro. Esto se debe a que en la práctica, estas propiedades son estimadas en función de mediciones discretas en terreno de la resistencia de cono, que no representan necesariamente las reales características del suelo de fundación [3]. Lo anterior, que puede ser debido a la comprensión insuficiente de un determinado fenómeno, se conoce como *incertidumbre epistémica* [4].

En la actualidad, debido a problemáticas típicas como la ausencia de datos, escasez de información y falta de conocimiento, la incertidumbre epistémica se convierte en un foco relevante de investigación [5]. No obstante, por su naturaleza, este tipo de incertidumbre ha sido explorada en menor medida que la incertidumbre aleatoria. Lo anterior se debe a que la incertidumbre aleatoria se puede expresar satisfactoriamente introduciendo los conceptos de la teoría de la probabilidad [6]. Por estas

razones, esta propuesta se enfocará en el estudio de la incertidumbre epistémica asociada a parámetros de entrada inciertos.

Toda la discusión anterior resalta que la selección de los parámetros de entrada para la modelización de un sistema es crucial [7]. De esta forma, la caracterización de los parámetros de entrada tiene asociada una incertidumbre, que es intrínseca a cada uno de ellos. Esta incertidumbre puede ser propagada hacia la respuesta de interés mediante la representación con modelos de elementos finitos (MEF) [8, 9]. En la práctica, el problema asociado a las incertezas que pueden afectar un sistema estructural es mitigado por el uso de factores de seguridad provocando, en ocasiones, sobre-dimensionamiento y volviendo ineficientes los diseños [3].

La *cuantificación de la incertidumbre* no es una tarea fácil, pues propagarla involucra costos numéricos elevados [4, 2], alojados principalmente en cómo describirla y transferirla a la respuesta. En primer lugar, puede existir incertidumbre en la resistencia del sistema, determinada por la calidad de los materiales empleados, dimensiones de los elementos, propiedades del suelo de fundación, entre otros; como en el estado de cargas al que se verá sometido [10]. En segundo lugar, se encuentra el esfuerzo asociado tanto a la simulación de una estructura como al ensamblaje de sus matrices de rigidez. Asimismo, otro problema asociado a la cuantificación de la incertidumbre de los parámetros de diseño, es que se puede identificar dependencia espacial en los valores que caracterizan a algunas de estas variables. Es decir, los parámetros no deterministas, como el estado de cargas al que se somete una estructura, pueden tener una distribución no homogénea en el dominio del modelo considerado [11]. Este fenómeno se evidencia, por ejemplo, con la caracterización de las propiedades del suelo de fundación, las que alojan incertidumbre como se ilustró anteriormente. Por ende, además del problema asociado al costo numérico, se tiene que no todos los parámetros de diseño se comportan de forma similar. Es decir, existen variables que, además de ser afectadas por la incertidumbre son función de alguna medida de distancia, por lo que es necesario considerar estrategias que permitan incorporar dependencias espaciales.

Actualmente existen diversas técnicas para la caracterización de la incertidumbre epistémica, que van desde la aplicación de la aritmética de intervalos [7, 10], variables difusas [4, 12], enfoques mediante optimización [13], modelos sustitutos [8], campos de intervalos [11], al uso de redes neuronales [14]. Estas metodologías han sido aplicadas para resolver problemas reales como el estimar el flujo en medios porosos, asentamiento de pilotes hincados en arcilla, y desplazamiento de sistemas estructurales como enrejados, vigas y losas. Específicamente, para el caso de las metodologías que aplican la teoría de *conjuntos difusos* y *análisis de intervalos*, la incertidumbre asociada a las variables de diseño se representa con una *función de pertenencia*, la que permite caracterizar una variable de interés con una mínima cantidad de información. Del mismo modo, en el caso de las técnicas que consideran campos de intervalos, se requieren de *funciones base* que incorporan la dependencia espacial de los parámetros por medio de *funciones de peso*. Sin embargo, la aplicación práctica de estas técnicas puede ser muy costosa desde el punto de vista numérico. Tal dificultad podría ser superada considerando *modelos aproximados*, de menor costo numérico. Un ejemplo de este tipo de metodologías corresponde a los *modelos de base reducida*, que proyectan las ecuaciones de equilibrio a un espacio de dimensión más pequeña que la original [12].

Debido a lo anterior, el trabajo que se presenta a continuación busca generar una

metodología que permita incorporar la dependencia espacial de las variables inciertas de tipo epistémicas que afectan un sistema estructural, y con ello, cuantificar eficientemente esta incertidumbre. Así, en este estudio se introduce el concepto de *campo difuso*, como una extensión del trabajo desarrollado con campos de intervalo [11] y variables difusas [12]. Lo anterior representa un progreso en el desarrollo de técnicas robustas para la caracterización de parámetros inciertos con dependencia espacial de los MEF, continuando con el desarrollo de metodologías con enfoque en la reducción del coste numérico y uso del análisis difuso.

1.2. Objetivo General

Desarrollar una metodología eficiente para cuantificar la incertidumbre epistémica en la respuesta de sistemas estructurales. El foco estará en aquellos sistemas con comportamiento lineal elástico de los materiales que los conforman, y para hipótesis de cargas estáticas. En ellos, se considerará que los parámetros referentes a la estructura y solicitaciones asumen valores inciertos, cuyas propiedades se representan a través de variables y campos difusos. La incertidumbre asociada a la respuesta de un sistema de estas características se cuantificará mediante modelos de base reducida.

1.3. Objetivos Específicos

- Caracterizar la incertidumbre epistémica asociada a parámetros de entrada inciertos de sistemas estructurales (referentes a sus propiedades y solicitaciones), mediante variables y campos difusos.
- Desarrollar rutinas de elementos finitos de ejemplos típicos en ingeniería estructural como son pilas y vigas. En la última parte de esta tesis, también se investiga una aplicación que involucra el análisis de flujo en medios porosos, pues los principios físicos que gobiernan tal fenómeno se pueden estudiar utilizando técnicas similares a la de problemas de ingeniería estructural.
- Implementar métodos para la resolución de problemas estáticos con parámetros inciertos utilizando técnicas de reducción de modelos, disminuyendo los tiempos de cómputo.

1.4. Estructura

En el Capítulo 2 de este estudio se muestra el marco teórico del análisis difuso. Para ello, se detalla su formulación y aplicación en análisis estructural por medio del análisis de intervalos. Asimismo, se expone el estado del arte de las técnicas existentes para su aplicación a sistemas estructurales lineales. En este acápite se destacan las ventajas y falencias de las metodologías presentes en la literatura.

En el Capítulo 3 se introduce el problema de dependencia espacial asociado a la caracterización de la incertidumbre epistémica y se define el concepto de campo difuso. Se presenta la metodología para propagar la incertidumbre mediante la caracterización de los parámetros inciertos con esta estrategia. El capítulo cierra presentando las actuales técnicas que se han aplicado para hallar la función de pertenencia de la respuesta.

En el Capítulo 4 se detalla el uso de un modelo de base reducida para predecir la respuesta de sistemas estructurales lineales, cuyos parámetros de entrada son caracterizados mediante variables y campos difusos. Así, se detalla la formulación del modelo de base reducida exponiendo la metodología para su construcción. Del mismo modo, se expone la necesidad de dar seguimiento al error asociado a la aproximación propuesta y se propone una metodología para mantener bajo un cierto umbral dicho error.

En el Capítulo 5 se presentan dos ejemplos sencillos donde se expone la aplicación de la metodología propuesta: un sistema lineal elástico bajo cargas estáticas y un problema de flujo en estado estacionario en un medio poroso. Note que este último problema puede ser resuelto utilizando las mismas técnicas desarrolladas para sistemas estructurales. Aquí, se analiza la solución exacta y aproximada del sistema por medio un modelo reducido y se discuten los resultados según el error máximo tolerado en dicho modelo.

Finalmente, en el Capítulo 6 se exponen las principales conclusiones obtenidas a partir de la metodología propuesta.

Capítulo 2

ANÁLISIS DIFUSO

2.1. Introducción

Para entender cómo funciona el análisis difuso y su aplicabilidad al estudio de sistemas lineales, es necesario introducir ciertos conceptos. El análisis difuso tiene su base en la aplicación de la lógica difusa. Esta teoría fue introducida formalmente por Zadeh en 1965 [1], la que nace de la necesidad de representar matemáticamente aquellos casos en los que el conocimiento de un determinado fenómeno no es preciso, y, por ende, no se puede dar respuesta por medio de la teoría clásica de conjuntos [10]. Por lo tanto, su aplicación no solo tiene lugar en el campo de la ingeniería estructural.

Un conjunto difuso puede ser interpretado como una extensión de un conjunto clásico en donde existe más de un estado posible para un determinado elemento. Es decir, a diferencia de la teoría clásica en la que un elemento tiene dos opciones posibles: pertenecer (1) o no (0) a un conjunto en particular, en la lógica difusa existen grados de pertenencia que son representados por *funciones de pertenencia* [1]. La representación de este tipo de conjuntos se expondrá más adelante. En el contexto de este estudio, el objetivo de la aplicación del análisis difuso es otorgar una herramienta para estudiar la propagación de la incertidumbre epistémica en sistemas estructurales. En particular, resulta de interés conocer la incertidumbre epistémica en la respuesta referente al desplazamiento (vale decir, la salida obtenida tras el proceso de modelación) en sistemas estructurales lineales estáticos, bajo la acción de parámetros relacionados también con la estructura y condiciones de carga inciertos. Sin embargo, esta metodología puede aplicarse para otras salidas de la modelación con elementos finitos, así como para otras variables inciertas.

2.2. Variables difusas

El alcance de la teoría de análisis difuso se ha ampliado a la incertidumbre epistémica en general, proporcionando una alternativa más intuitiva a la teoría de la probabilidad, ya que una de las ventajas de su aplicación es que permite, entre otras cosas, incorporar el conocimiento de expertos [4]. Lo anterior representa una ventaja en la etapa de modelización de sistemas estructurales dado que la fuente de este tipo de incertidumbre es, en parte, producto de la escasa información disponible. En este estudio, la teoría del análisis difuso es aplicada para analizar la respuesta de sistemas estructurales lineales y estáticos [1].

Considere una estructura lineal elástica sometida a cargas estáticas cuyo comportamiento se caracteriza mediante un modelo numérico. Este modelo involucra n_θ

parámetros de entrada $\theta_i, i = 1, \dots, n_\theta$ asociados a propiedades estructurales y a las cargas que actúan sobre la estructura, cuyo valor no se conoce de manera determinística. Estos parámetros pueden caracterizarse como variables difusas mediante *funciones de pertenencia*. Lo anterior implica que $\theta_i \in \Theta_i, i = 1, \dots, n_\theta$, donde Θ_i es el conjunto fundamental asociado al i -ésimo parámetro difuso, es decir, Θ_i contiene todos los valores que la variable de entrada puede asumir. El conjunto difuso asociado se representa por:

$$\tilde{\theta}_i = \left\{ \left(\theta_i, \mu_{\tilde{\theta}_i}(\theta_i) \right) : (\theta_i \in \Theta_i) \wedge \left(\mu_{\tilde{\theta}_i}(\theta_i) \in [0, 1] \right) \right\}, \quad (2.1)$$

$$i = 1, \dots, n_\theta$$

donde $\tilde{\theta}_i, i = 1, \dots, n_\theta$ es el conjunto difuso que representa la incerteza asociada a los parámetros de diseño considerados θ_i (estructurales y de carga), mientras que $\mu_{\tilde{\theta}_i}$ corresponde a la función de pertenencia. En teoría de conjuntos clásica $\mu_{\tilde{\theta}_i}$ es igual a cero o uno. Sin embargo, en teoría difusa, $0 \leq \mu_{\tilde{\theta}_i}(\theta_i) \leq 1$ lo que implica un *grado de pertenencia* asociado a $\tilde{\theta}_i$, donde $\mu_{\tilde{\theta}_i}(\theta_i) = 0$ indica que no hay pertenencia, mientras que $\mu_{\tilde{\theta}_i}(\theta_i) = 1$ representa que θ_i está completamente incluido en $\tilde{\theta}_i$.

Existen diversos tipos de funciones de pertenencia. La Figura 2.1 muestra dos tipos de funciones de pertenencia representativas, $\mu_{\tilde{\theta}_1}(\theta_1)$ y $\mu_{\tilde{\theta}_2}(\theta_2)$, asociadas a dos parámetros θ_1 y θ_2 , cuyo valor es incierto. El gráfico de la izquierda corresponde a una función de pertenencia discreta formada en base a pares ordenados, mientras que el gráfico de la derecha representa una función de pertenencia continua triangular. La función $\mu_{\tilde{\theta}_1}(\theta_1)$ suele aplicarse para los casos en que la variable difusa corresponde, por ejemplo, a una propiedad cuyos valores están preestablecidos, como la inercia de perfiles acero dado que sus medidas comerciales son discretas. En contraste, el esquema de la derecha, que muestra a la función $\mu_{\tilde{\theta}_2}(\theta_2)$, es útil para variables que comprenden un rango continuo de valores, como el peso unitario del suelo. La ventaja del uso de esta clase de representación de la incertidumbre yace en la escasa información que requiere para su construcción [4].

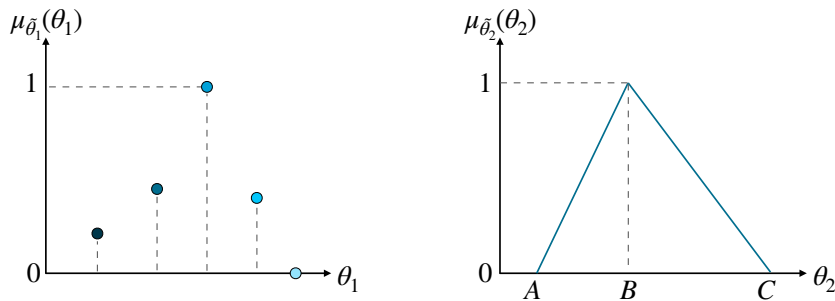


FIGURA 2.1: Ejemplo de funciones de pertenencia discreta y continua.

A su vez, las funciones de pertenencia continuas pueden ser de dos tipos: convexas o no convexas. Esta caracterización adquiere importancia a la hora de realizar análisis difuso en elementos finitos, pues el uso de funciones convexas simplifica los procedimientos. La Figura 2.2 presenta esquemáticamente ambos tipos de funciones, siendo $\mu_{\tilde{\theta}_1}(\theta_1)$ de tipo convexa y $\mu_{\tilde{\theta}_2}(\theta_2)$ no convexa, donde θ_i^0 representa el valor de θ_i para el que $\mu_{\tilde{\theta}_i}(\theta_i) = 1$. Para que una función sea convexa, se debe cumplir que:

$$\mu_{\tilde{\theta}_i}(\theta_i^C) \geq \min(\mu_{\tilde{\theta}_i}(\theta_i^I), \mu_{\tilde{\theta}_i}(\theta_i^D)), \forall \theta_i^I, \theta_i^C, \theta_i^D \in \Theta_i \quad (2.2)$$

donde $\theta_i^I \leq \theta_i^C \leq \theta_i^D$, $i = 1, \dots, n_\theta$. Si se cumple lo anterior, las funciones obtenidas para la respuesta de interés de un modelo cuyos parámetros de entrada son difusos, también serán convexas [12]. Debido a lo anterior y por su simplicidad, en esta propuesta se utilizaron funciones de tipo triangular para representar la incertidumbre epistémica.

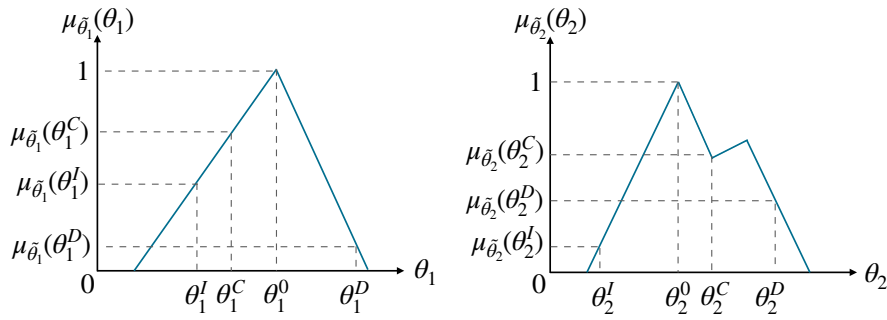


FIGURA 2.2: Conjuntos difusos convexas y no convexas.

Con respecto a su construcción, note que las funciones de pertenencia triangulares, como la presentada en la Figura 2.1, pueden generarse conociendo los valores asociados a los vértices A , B y C . Estos valores pueden obtenerse en base al conocimiento de expertos, información disponible en la literatura o por medio de resultados de ensayo, es decir, a partir de muestras. En este último caso, resulta útil el uso de histogramas ya que facilita el bosquejo de la función de pertenencia. Para efectos de este estudio, las funciones de pertenencia asociadas a los parámetros inciertos considerados θ_i se asumen conocidas.

Otra ventaja del uso de funciones de pertenencia para caracterizar parámetros inciertos, es que permiten representar variables sobre las cuales se tiene mucha o poca información. Considere dos parámetros inciertos: θ_1 que corresponde a la inercia de la sección de una losa de hormigón armado, y θ_2 que hace referencia al módulo de balasto del suelo de fundación bajo dicha losa. Ambos parámetros son caracterizados por medio de las variables difusas $\tilde{\theta}_1$ y $\tilde{\theta}_2$, respectivamente; y tienen asociadas las funciones $\mu_{\tilde{\theta}_1}$ y $\mu_{\tilde{\theta}_2}$ que se ilustran en la Figura 2.3. Para el caso de la variable

θ_1 , como la inercia depende de las medidas de diseño obtenidas tras el cálculo estructural, se tiene un mayor grado de certeza de la medida real de la sección una vez construida, y, por tanto, de su inercia. Por ende, su función de pertenencia $\mu_{\tilde{\theta}_1}$ tiene una forma más *estrecha*, es decir, los vértices A_1 y C_1 están más cercanos a B_1 , que representa el valor de la inercia asociado a un nivel de pertenencia igual a 1. En contraste, para la función de pertenencia $\mu_{\tilde{\theta}_2}$ que caracteriza al balasto del suelo de fundación, como su valor es determinado en base a los resultados de un ensayo de placa de carga, y depende tanto de las propiedades del suelo como de las dimensiones del área que se carga contra el terreno, existe mayor desconocimiento de la magnitud que puede tomar esta propiedad. De donde, su función de pertenencia $\mu_{\tilde{\theta}_2}$ exhibe una forma más *amplia*, vale decir, los vértices A_2 y C_2 están más alejados de B_2 , que está asociado a un nivel de pertenencia 1. Por tanto, existe un rango más amplio de valores que puede tomar la magnitud del balasto, en comparación con la inercia de la sección.

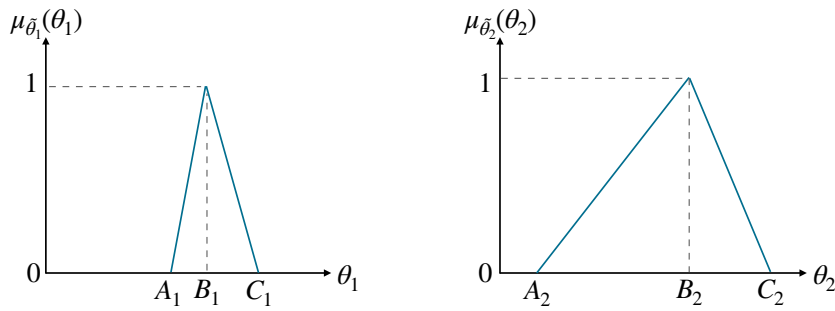


FIGURA 2.3: Ejemplos de funciones de pertenencia, donde $\mu_{\tilde{\theta}_1}$ representa una variable de la que se tiene mucha información y $\mu_{\tilde{\theta}_2}$ representa una variable de la que se tiene poca información.

Como se expuso recientemente, si los parámetros de entrada inciertos son caracterizados como variables difusas $\tilde{\theta}_i$, cada uno de ellos tendrá asociado una función de pertenencia $\mu_{\tilde{\theta}_i}$. Es interesante observar que para un nivel de pertenencia específico α_j ($0 < \alpha_j \leq 1$), existe un intervalo $\underline{\theta}_{i,\alpha_j}$ asociado a la variable incierta θ_i , donde $(\cdot)$ denota un intervalo. La Figura 2.4 muestra esquemáticamente el intervalo $\underline{\theta}_{1,\alpha_j}$ asociado a la variable difusa $\tilde{\theta}_1$ para un nivel de pertenencia α_j . Así, se obtiene un intervalo delimitado a la izquierda por θ_{1,α_j}^I y a la derecha por θ_{1,α_j}^D . Note que si se realiza el mismo procedimiento para reiterados cortes α_j , se obtiene una colección de intervalos que permiten representar aproximadamente la función de pertenencia $\mu_{\tilde{\theta}_i}$ de manera discreta.

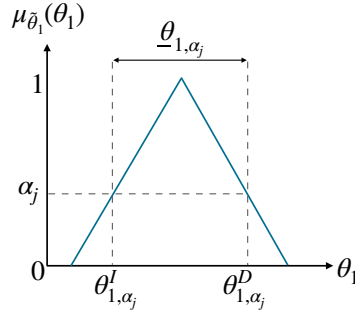


FIGURA 2.4: Representación esquemática de intervalo asociado a una variable difusa para un valor específico de pertenencia, a través de cortes α .

2.3. Respuesta estructural difusa de sistemas lineales

Considere un sistema estructural modelado con elementos finitos. Bajo la acción de cargas estáticas, la ecuación que permite determinar la respuesta de un sistema lineal en función de sus parámetros estructurales y condiciones de carga, para los n_d grados de libertad de la estructura es:

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.3)$$

Donde $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$ es la matriz de rigidez de la estructura de dimensiones $n_d \times n_d$, $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$ es el vector asociado a las cargas externas, cuya dimensión es $n_d \times 1$, y $\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta})$ es el vector de respuesta de desplazamiento de $n_d \times 1$ frente a las cargas. $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$ es definida positiva y $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$. Se observa que la matriz de rigidez de la estructura $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$ y las cargas externas $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$, dependen del vector de variables de entrada $\boldsymbol{\theta}$, por lo que la respuesta del sistema $\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta})$ también depende de estos parámetros de entrada. Note que la cantidad de grados de libertad n_d necesarios para representar una estructura con MEF suele ser alta y, por ende, dar solución a la Ecuación 2.3 requiere de un elevado esfuerzo numérico.

De manera adicional, note que la ecuación 2.3 permite analizar y resolver una serie de fenómenos físicos en estado estacionario [15], que involucran, por ejemplo, transferencia de calor [16, 17]. De hecho, en la última parte de esta tesis, se analiza un problema de flujo en un medio poroso. En tal situación, la matriz $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$ representa permeabilidad del medio, el vector $\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta})$ las cotas piezométricas, y el vector $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$ corresponde a los caudales [4].

En la práctica, es común que exista interés en conocer una respuesta determinada $r(\boldsymbol{\theta})$ del sistema asociada a un grado de libertad específico. De esta forma, la respuesta asociada a este grado de libertad viene dada por:

$$r(\theta) = \gamma^T u(\theta) \quad (2.4)$$

donde γ es un vector de coeficientes constantes de dimensión $n_d \times 1$ que permite extraer la información de interés de la respuesta de desplazamientos $u(\theta)$, y $(\cdot)^T$ denota el traspuesto del argumento. Indudablemente, la definición presentada en la Ecuación 2.4 puede ser extendida para considerar varias respuestas de interés. No obstante, en este trabajo se considera por simplicidad solo una respuesta.

Tal como se observa de las Ecuaciones 2.3 y 2.4, la respuesta de interés $r(\theta)$ depende del valor que la variable de entrada θ asume. Para ilustrar este punto, considere la representación esquemática de la Figura 2.5.a, donde se considera un sistema estructural simple: una viga con comportamiento lineal y elástico con una carga estática aplicada en el extremo libre, donde la respuesta de interés es el desplazamiento en dicho extremo. En esta figura, se considera que el modelo numérico asociado posee como única variable de entrada la carga y se asume que su valor es conocido e igual a θ^0 . Por lo tanto, el desplazamiento en el extremo asume un valor determinista igual a $r^0 = r(\theta^0)$.

La representación descrita en la Figura 2.5.a corresponde al enfoque determinístico del análisis de un sistema estructural, donde se asume que las variables de entrada de un modelo son conocidas y aceptan un único valor. No obstante, de acuerdo con lo descrito en la sección 2.2, es posible que exista incertidumbre respecto de estos parámetros de entrada. Retomando el ejemplo de la viga en voladizo descrito previamente, considere esta vez que la magnitud de la carga aplicada es incierta y que se caracteriza mediante un conjunto difuso $\tilde{\theta}$. En tal situación, la carga deja de asumir un valor preciso y, en cambio, puede asumir una serie de distintos valores. Esto se ilustra esquemáticamente en la Figura 2.5.b, donde se muestra la función de pertenencia $\mu_{\tilde{\theta}}(\theta)$ asociada a $\tilde{\theta}$.

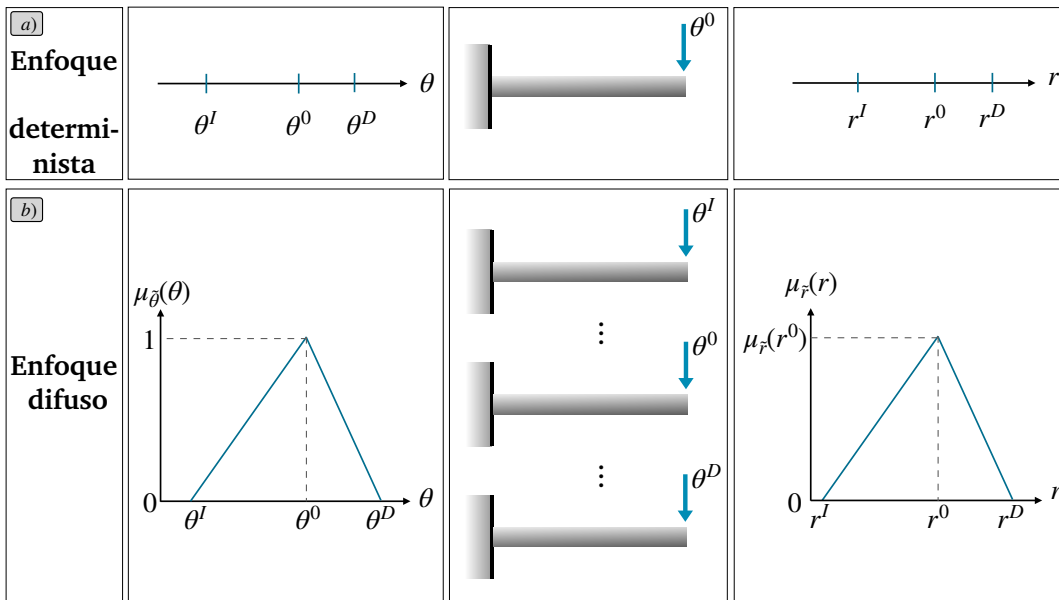


FIGURA 2.5: Enfoques determinista y difuso para la respuesta en desplazamiento de una viga en voladizo a la que se aplica una carga θ^0 en su borde libre.

De esta figura, se observa que la carga θ asume valores contenidos entre un límite inferior θ^I y un límite superior θ^D , existiendo distintos valores de pertenencia $\mu_{\tilde{\theta}}$ para distintos valores de θ . Note que estos límites y la función de pertenencia $\mu_{\tilde{\theta}}(\theta)$ pueden obtenerse en base a muestras o mediante el conocimiento de expertos, como se expuso en la sección 2.2. En vista de lo anterior, la respuesta de interés r del modelo se vuelve una variable difusa $\tilde{r}$. Por tanto, la respuesta r asume una serie de valores comprendidos entre un límite inferior r^I y un límite superior r^D , donde cada valor de respuesta dentro de ese intervalo posee un cierto nivel de pertenencia $\mu_{\tilde{r}}(r)$, tal como se presenta en la Figura 2.5.b. Las estrategias disponibles para hallar estos límites se exponen más adelante.

La discusión anterior pone en evidencia que cuando se modela un problema de mecánica estructural en el contexto del análisis difuso, la respuesta estructural se vuelve una variable difusa, con una función de pertenencia asociada. La forma que adquiera la función de pertenencia $\mu_{\tilde{r}}(r)$ revela la *sensibilidad* de la respuesta de la estructura ante la incertidumbre en los parámetros de entrada un modelo. En este sentido, la determinación de la función de pertenencia asociada a la respuesta $\mu_{\tilde{r}}(r)$ se convierte en un tema de suma importancia. Un enfoque para determinar esta función de pertenencia consiste en utilizar la interpretación de una variable difusa como una colección de intervalos, tal como se discutió en la sección 2.2. Para ello, las funciones de pertenencia $\mu_{\tilde{\theta}_i}(\theta_i)$ asociadas a cada variable difusa $\tilde{\theta}_i$ se analizan para valores discretos de pertenencia α_j , con $j = 1, \dots, n_c$, donde n_c indica el número de niveles discretos considerados. Eso implica que para cada uno de esos niveles de pertenencia α_j , habrá un intervalo asociado a cada variable θ_i , es decir:

$$\underline{\theta}_{i,\alpha_j} = \left\{ \theta_i \in \Theta_i : \mu_{\tilde{\theta}_i}(\theta_i) \geq \alpha_j \right\}, i = 1, \dots, n_\theta, \alpha_j \in (0, 1) \quad (2.5)$$

En donde $\underline{\theta}_{i,\alpha_j}$ representa el conjunto posible de valores que θ_i puede tomar para el corte α_j de la función de pertenencia, que en realidad es un intervalo cuyo límite inferior es θ_{i,α_j}^I y su límite superior corresponde a θ_{i,α_j}^D .

Teniendo en cuenta que:

1. Para cada nivel de pertenencia α_j considerado, hay un intervalo $\underline{\theta}_{i,\alpha_j}$ asociado a cada variable de entrada, como se presenta en la Figura 2.6 a la izquierda.
2. Las funciones de pertenencia consideradas para los parámetros de entrada son convexas.
3. Existe una función continua entre los parámetros de entrada y la respuesta, dada por las Ecuaciones 2.3 y 2.4,

Se observa que para un nivel de pertenencia α_j dado, la respuesta de interés r estará contenida en un intervalo $\underline{r}_{\alpha_j}$ con límites superior $r_{\alpha_j}^D$ e inferior $r_{\alpha_j}^I$, como se muestra en la porción derecha de la Figura 2.6. Es decir,

$$r_{\alpha_j}^I = \min_{\theta} (r(\theta)), \theta_i \in \underline{\theta}_{i,\alpha_j}, i = 1, \dots, n_\theta \quad (2.6)$$

$$r_{\alpha_j}^D = \max_{\theta} (r(\theta)), \theta_i \in \underline{\theta}_{i,\alpha_j}, i = 1, \dots, n_\theta \quad (2.7)$$

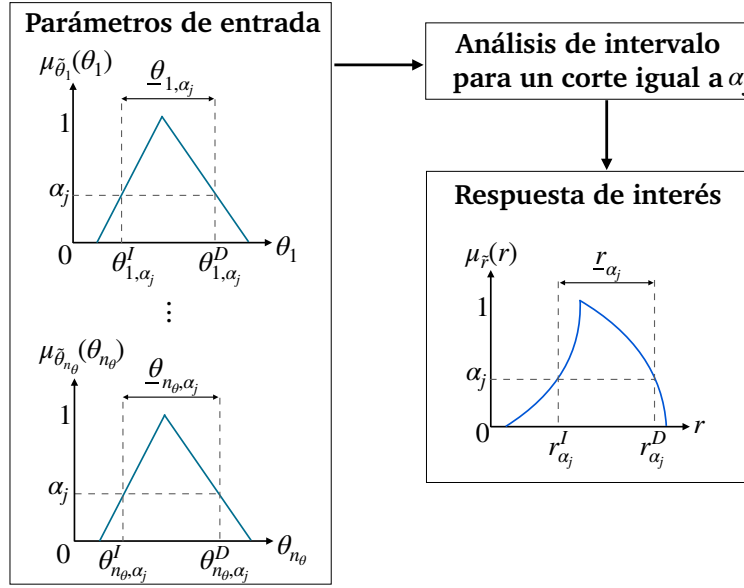


FIGURA 2.6: Representación gráfica de la discretización para un nivel de pertenencia α .

Dado que para cada nivel de pertenencia α_j hay asociado un intervalo de la respuesta $\underline{r}_{\alpha_j}$, es posible determinar la función de pertenencia asociada a la respuesta de manera aproximada. Esto se representa esquemáticamente en la Figura 2.7, donde la colección de intervalos de respuesta para distintos niveles de pertenencia α_j , con $j = 1, \dots, n_c$, permite aproximar la forma de dicha función de pertenencia. Así, en la Figura 2.7 se representan los intervalos de la respuesta $\underline{r}_{\alpha_1}$ y $\underline{r}_{\alpha_2}$ asociados a los nivel de pertenencia α_1 y α_2 , respectivamente.

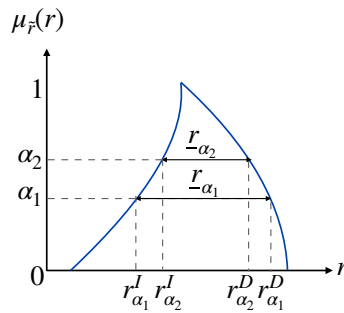


FIGURA 2.7: Esquema de discretización α .

2.4. Estrategias para cuantificar la respuesta difusa de sistemas estructurales

La descripción anterior ofrece una idea general sobre cómo se puede determinar la función de pertenencia $\mu_{\tilde{r}}(r)$ asociada a la respuesta difusa $\tilde{r}$. De dicha descripción, se observa que la clave consiste en interpretar el problema de análisis difuso como una colección de problemas de análisis de intervalos. Para ello, el primer paso consiste en realizar un corte α_j a las funciones de pertenencia asociadas a los n_θ parámetros inciertos considerados. Esto permite obtener un intervalo $\underline{\theta}_{i,\alpha_j}$ asociado a cada parámetro incierto θ_i para el corte α_j en análisis, como se expuso en la ecuación 2.5. Luego, con los n_θ intervalos de entrada obtenidos y mediante análisis de intervalos, es posible estimar los límites de la respuesta del sistema para el nivel α_j estudiado, dando solución a las ecuaciones 2.6 y 2.7. Indudablemente, el mayor desafío para la implementación práctica consiste precisamente en cómo realizar estos análisis de intervalos.

A continuación, se discuten las cuatro grandes líneas de estrategias que se han aplicado para realizar esta tarea. Se debe tener en cuenta que, por la explicación dada recientemente, las estrategias presentadas están descritas como herramientas para sortear el problema de análisis de intervalos, resultante de la evaluación de un corte α_j .

2.4.1. Estrategias mediante aritmética de intervalos

El análisis por medio de aritmética de intervalos se desarrolló originalmente para modelar la propagación de errores de redondeo mediante cálculos computarizados [7]. En la actualidad, este tipo de análisis se ha extendido a varias áreas, siendo hoy en día ampliamente utilizado en el campo de la ingeniería civil. El trabajo de Degrauwe et al. [4] muestra cómo se puede utilizar la aritmética de intervalos en el análisis de estructuras mediante el método de elementos finitos. En esta estrategia, una variable incierta está representada por un intervalo finito cerrado. Así, los parámetros están completamente caracterizados por su límite inferior y superior, transformando el análisis de intervalo en una técnica atractiva cuando existe información limitada, pues entrega una colección de posibles valores que puede tomar la variable de estudio, sin distinguir entre ellos [4, 7].

Un intervalo escalar $\underline{x}$ se define por:

$$\underline{x} = \{x \mid (x \in \mathbb{R})(x^I \leq x \leq x^D)\} \quad (2.8)$$

Con x^I el límite inferior y x^D el límite superior. En análisis de intervalos, los cálculos se realizan mediante la aritmética de intervalos, la que se basa en la definición de las operaciones de suma (+), resta (-), multiplicación ($\times$) y división (/) que se presentan a continuación:

$$\underline{x} + \underline{y} = [x^I + y^I, x^D + y^D] \quad (2.9)$$

$$\underline{x} - \underline{y} = [x^I - y^D, x^D - y^I] \quad (2.10)$$

$$\underline{x} \times \underline{y} = [\text{mín} \{x^I y^I, x^I y^D, x^D y^I, x^D y^D\}, \text{máx} \{x^I y^I, x^I y^D, x^D y^I, x^D y^D\}] \quad (2.11)$$

$$\underline{x}/\underline{y} = \underline{x} \times \left[\frac{1}{\underline{y}^D}, \frac{1}{\underline{y}^I} \right] \quad (2.12)$$

Aun cuando algunas de las propiedades aritméticas que son válidas para escalares se mantienen para intervalos, como la conmutatividad y asociatividad (para la suma y multiplicación), otras no existen. Por formulación, la aritmética de intervalo no posee inversos multiplicativos ni aditivos, mientras que la propiedad de distributividad está presente de forma relajada y se manifiesta mediante la *subdistributividad*, que sólo asegura que el resultado de la operación $(\underline{x} + \underline{y}) \times \underline{z}$ es un subconjunto de $(\underline{x} \times \underline{z} + \underline{y} \times \underline{z})$. Así, se origina un problema de dependencia que surge debido a que diferentes ocurrencias de una sola variable de intervalo se tratan como variables independientes en una misma expresión [4, 7]. Este problema puede ser fácilmente explicado mediante el siguiente ejemplo.

Considere la función mostrada en la Ecuación 2.13, para $\underline{x} = [1, 2]$.

$$f(x) = \frac{1+x}{x} \quad (2.13)$$

Al evaluar $f(\underline{x})$ considerando las operaciones descritas anteriormente, se obtiene:

$$\underline{y}_1 = f(\underline{x}) = \frac{1 + [1, 2]}{[1, 2]} = \frac{[2, 3]}{[1, 2]} = [1, 3] \quad (2.14)$$

Sin embargo, si se simplifica la Ecuación 2.13 y evalúa $\underline{x}$ en ella se obtienen el resultado exacto:

$$\underline{y}_2 = f(\underline{x}) = 1 + \frac{1}{\underline{x}} = 1 + \frac{1}{[1, 2]} = 1 + \left[\frac{1}{2}, 1 \right] = \left[\frac{3}{2}, 2 \right] \quad (2.15)$$

Dado que se trabajó $\underline{x}$ de forma independiente en cada aparición en la Ecuación 2.14, se produjo una sobre-estimación del intervalo de resultado. Considerando que la resolución de problemas con MEF involucra un alto número de operaciones sobre variables que suelen aparecer en reiteradas ocasiones, la representación de variables inciertas mediante el uso de aritmética de intervalo no es recomendable para resolver sistemas de ecuaciones lineales como los originados tras la etapa de modelización [10].

De esta forma, un inconveniente importante de las variables de intervalo es que sus resultados son muy conservadores [10, 18]. Para sortear este problema, algunos autores proponen el uso de la aritmética afín, al permitir el seguimiento de la dependencia entre variables. Para ello, se definen los intervalos en términos de un elemento central más las dependencias lineales en la variable de entrada y el término de error correspondiente a las dependencias no lineales [4].

Otra variante de este método consiste en el uso de intervalos unitarios, propuesto en [10]. Este enfoque asocia un intervalo unitario, a cada parámetro incierto, lo que permite realizar un seguimiento de las dependencias entre variables de intervalo en las etapas de ensamblaje y solución con el procedimiento de elementos finitos. Los límites del intervalo y la respuesta estructural en términos de desplazamientos y tensiones se obtienen en forma cerrada aproximada, aplicando el método de *Expansión de Serie Racional de Intervalo* [10] que proporciona una expresión explícita aproximada de la inversa de la matriz de rigidez del intervalo.

2.4.2. Enfoque de optimización directa

El enfoque de optimización directa permite determinar el nivel inferior y superior de la respuesta de un modelo, aplicando un algoritmo de búsqueda en el dominio definido por el intervalo de entrada [18]. Si la búsqueda resulta exitosa, es decir, mediante el esquema de optimización se encuentran ambos límites, el algoritmo produce:

$$\underline{r}(\theta) = \left\{ r(\theta) \mid (\theta \in \underline{\theta}) \wedge \left(r(\theta) = \gamma^T K^{-1}(\theta) f(\theta) \right) \right\} \quad (2.16)$$

Donde $\underline{r}(\theta)$ es el intervalo obtenido, y θ el vector de parámetros inciertos contenidos en el intervalo $\underline{\theta}$. De esta forma, la solución de un problema de intervalo de elementos finitos se convierte en un problema de optimización (ver Ecuación 2.17 y 2.18), cuya función objetivo es el resultado del análisis determinístico de elementos finitos [18].

$$r^I = \min_{\theta \in \underline{\theta}} r(\theta) = \gamma^T K^{-1}(\theta) f(\theta) \quad (2.17)$$

$$r^D = \max_{\theta \in \underline{\theta}} r(\theta) = \gamma^T K^{-1}(\theta) f(\theta) \quad (2.18)$$

En donde, r^I e r^D denotan los límites superior e inferior hallados tras el proceso de optimización, del intervalo resultante $\underline{r}$. Según Moens y Hanss [18] la función objetivo muy a menudo exhibe un comportamiento suave con respecto a los parámetros inciertos, facilitando el procedimiento de optimización. Sin embargo, el proceso de búsqueda no deja de ser costoso desde un punto de vista numérico. Lo anterior se debe a que para encontrar los límites r^I e r^D , se requiere de la evaluación exacta de la función objetivo en cada punto de iteración de la búsqueda. Asimismo, el método de optimización directa tiene la desventaja que se subestima el intervalo de respuesta, pues el algoritmo aproxima el resultado del intervalo asociado a la respuesta desde el interior [18].

2.4.3. Estrategias mediante modelos sustitutos

Para sortear el problema referente al costo numérico de la optimización directa, se formularon diversas técnicas en que la función objetivo del desplazamiento es aproximada mediante un modelo sustituto apropiado, al que se aplica la optimización con un menor esfuerzo numérico. Así, la respuesta de interés $r(\theta)$ se reemplaza con una respuesta aproximada $r^A(\theta)$ [12]. Existen distintas estrategias que permiten formular $r^A(\theta)$.

2.4.3.1. Expansión con series de Taylor

Las series de Taylor son aplicables en el análisis difuso para determinar una aproximación a la respuesta de desplazamiento del sistema. Esto se debe a que permiten representar una función como una suma de potencias en torno a un punto de expansión, conformando un modelo sustituto que requiere un menor costo numérico [8]. La expansión de primer orden r^L se presenta a continuación:

$$r(\theta) \approx r^L(\theta) = r_0 + \sum_{i=1}^n r_{,i} (\theta_i - \theta_i^0) \quad (2.19)$$

En donde θ^0 corresponde al punto de expansión escogido conforme un criterio adecuado. Por ejemplo, el punto del intervalo asociado con un nivel de pertenencia uno. θ_i^0 es el componente i -ésimo de θ^0 , r_0 es el desplazamiento evaluado en el punto de expansión, mientras que $r_{,i}$ denota la derivada parcial de r respecto a θ_i , evaluada en θ^0 . La derivada $r_{,i}$ puede ser obtenida mediante procedimientos analíticos, tal como se describe en [8], cálculo que se detallará en breve. Mediante estrategias de optimización, es posible hallar los valores máximos y mínimos para r^L , considerando que la función objetivo mostrada en las Ecuaciones 2.17 y 2.18 correspondería, en el caso de la expansión de primer orden, a una recta. La Figura 2.8 a la izquierda muestra la aproximación de primer orden r^L (recta en color rojo) obtenida tras aplicar la expansión presentada en la Ecuación 2.19 a $r(\theta)$ en torno al punto (θ^0, r^0) . Si se aplica un esquema de optimización, como el presentado en la sección 2.4.2, es posible encontrar los límites superior r^D e inferior r^I para la respuesta r . Sin embargo, si se consideran términos de mayor orden en la expansión, la precisión del método puede mejorar. Este efecto se muestra en la porción derecha de la Figura 2.8, donde la curva verde representa la expansión de segundo orden de Taylor r^Q , en torno al mismo punto (θ^0, r^0) para la respuesta $r(\theta)$. Para esta aproximación, los límites r^I e r^D también pueden obtenerse mediante estrategias de optimización. En dicha figura se observa claramente que los límites r^I e r^D , hallados al considerar como función objetivo a la aproximación de segundo orden, son más cercanos que los encontrados con la aproximación de primer orden r^L . La expansión de segundo orden r^Q para la respuesta de desplazamiento viene dada por:

$$\begin{aligned} r(\theta) &\approx r^Q(\theta) \\ &= r_0 + \sum_{i=1}^n r_{,i} (\theta_i - \theta_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{,ij} (\theta_i - \theta_i^0) (\theta_j - \theta_j^0) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Donde la notación es idéntica que para la expansión de primer orden y $r_{,ij}$ denota la derivada parcial de segundo orden de r respecto a θ_i y θ_j evaluada en θ^0 . Las expresiones para obtener $r_{,i}$ y $r_{,ij}$ se presentan en [8].

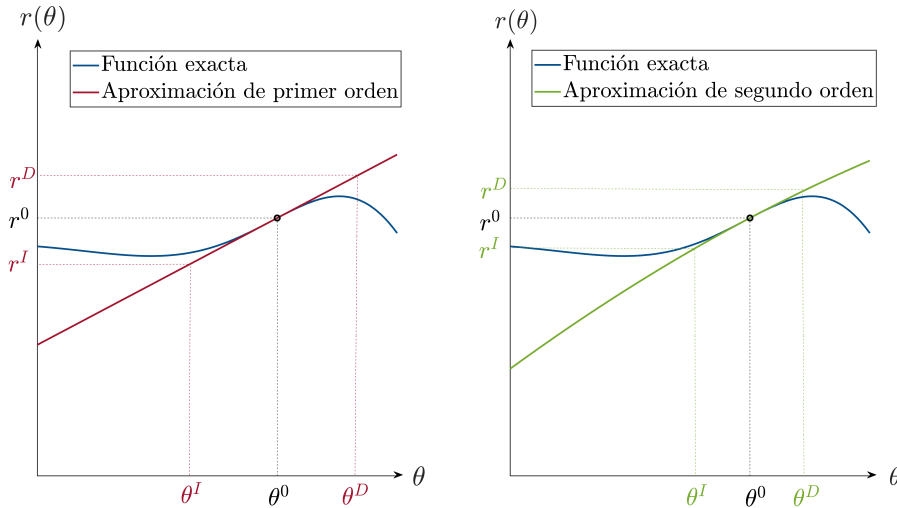


FIGURA 2.8: A la izquierda, aproximación de primer orden. A la derecha, aproximación de segundo orden con series de Taylor para el punto de expansión (θ^0) .

Identificar el óptimo no es un proceso sencillo en expansiones de orden superior, como la presentada en la Ecuación 2.20. Esto se debe a que la aparición de términos cruzados en la expresión aproximada hace que el problema de optimización deje de ser lineal. Debido a lo anterior, trabajos como el de [19] excluyen estos términos.

Para la ejecución de estos métodos sustitutos, que plantean una aproximación de la respuesta, es necesario calcular la *sensibilidad de la respuesta estructural* [20] con respecto a los parámetros inciertos considerados. El análisis de sensibilidad busca establecer la relación que existe entre los parámetros de diseño y la respuesta de la estructura, por lo que permite explicar qué le sucede al sistema estructural frente a variaciones en la magnitud de dichos parámetros.

La sensibilidad para un problema estático modelado con MEF, se obtiene derivando la ecuación de equilibrio 2.3, mediante el método directo descrito en [20], respecto a la colección de parámetros inciertos $\theta_i, i = 1, \dots, n_\theta$. De donde,

$$\frac{\partial K(\theta)}{\partial \theta_i} u(\theta) + K(\theta) \frac{\partial u(\theta)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta_i} \quad (2.21)$$

Despejando el término que contiene la derivada parcial del vector de desplazamientos, respecto al parámetro incierto θ_i , se tiene que:

$$K(\theta) \frac{\partial u(\theta)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta_i} - \frac{\partial K(\theta)}{\partial \theta_i} u(\theta) \quad (2.22)$$

Multiplicando a la izquierda por la inversa de la matriz de rigidez del sistema, se obtiene:

$$\frac{\partial u(\theta)}{\partial \theta_i} = K^{-1}(\theta) \left(\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta_i} - \frac{\partial K(\theta)}{\partial \theta_i} u(\theta) \right) \quad (2.23)$$

Donde $\partial u(\theta) / \partial \theta_i$ denota la derivada parcial de primer orden del desplazamiento u respecto al parámetro incierto θ_i , $K^{-1}(\theta)$ representa la inversa de la matriz de rigidez del sistema, $\partial f(\theta) / \partial \theta_i$ corresponde a la derivada parcial de primer orden del vector de cargas f respecto a θ_i , y $\partial K(\theta) / \partial \theta_i$ denota la derivada parcial de primer orden de la matriz de rigidez K con respecto a θ_i . Note que se obtienen n_θ derivadas del vector de desplazamientos, una por cada parámetro incierto considerado.

2.4.3.2. Redes neuronales

Otro tipo de modelos sustitutos corresponden a los que incorporan redes neuronales para predecir la respuesta de interés [14, 21, 22]. Las redes neuronales artificiales consisten en unidades simples de procesamiento de información llamadas neuronas y enlaces de transferencia de información entre las neuronas, mediante las conexiones sinápticas. En la forma básica de una red de alimentación, las conexiones sinápticas transfieren señales capa por capa en una determinada dirección a través de la red [22].

En el estudio de sistemas estructurales se han incorporado distintos tipos de redes neuronales. Las redes de alimentación hacia adelante (Feed Forward) han sido aplicadas para la descripción del módulo de elasticidad de los materiales, y corresponden a una red de base radial (Radial Basis Network), como la que se muestra en la Figura 2.9.a, en que todos los nodos están completamente conectados y la activación fluye de la capa de entrada (en naranja) a la de salida (en morado), sin bucles de retorno, existiendo una única capa entre la entrada y la salida, denominada capa

oculta (en verde) [23]. Con el avance computacional, este tipo de redes evolucionó para admitir más de una capa de oculta y, con ello, mejorar el proceso de aprendizaje automático. Así, se conformaron las redes neuronales de avance profundo (Deep Feed Forward), cuyo esquema se expone en la Figura 2.9.b, para una red que admite dos capas ocultas.

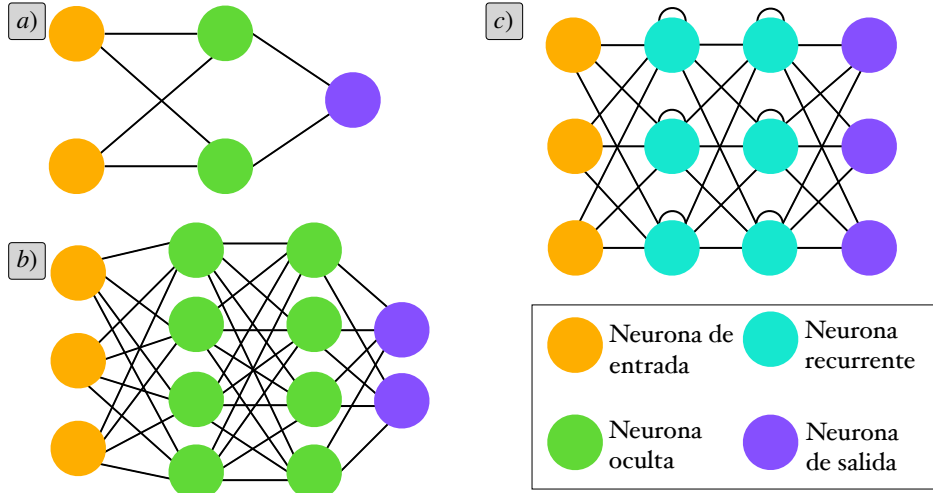


FIGURA 2.9: Tipos de redes neuronales. a) Red de Base Radial (RBN). b) Redes Neuronales de Avance Profundo (DFF). c) Red Neuronal Recurrente (RNN).

Otro tipo de redes aplicadas al análisis de sistemas estructurales corresponde a las redes neuronales recurrente (Recurrent Neural Network). La Figura 2.9.c muestra un esquema representativo de este tipo de configuración donde existen capas recurrentes (en celeste) compuestas de neuronas capaces de alimentarse de la información obtenida de iteraciones anteriores. Por ejemplo, en el trabajo desarrollado por [14] se implementaron RNN para predecir el asentamiento durante la construcción de túneles en tiempo real, dada la ventaja de utilizar celdas recurrentes al permitir incorporar la dependencia temporal.

2.4.3.3. Modelos de base reducida

Un modelo de orden reducido permite encontrar la respuesta aproximada en términos de desplazamiento $u^A(\theta)$ mediante la representación del sistema con una base reducida Φ de menor dimensión que la original ($n_d \times n_r$), dependiente de los parámetros inciertos θ [12]. Esto es,

$$u(\theta) \approx u^A(\theta) = \Phi \beta(\theta) \quad (2.24)$$

Donde Φ , es una matriz cuyas columnas son ϕ_i , $i = 1, \dots, n_r$ y β es un vector de $n_r \times 1$ cuyos componentes dependen de los parámetros inciertos. El procedimiento específico para construir la base reducida Φ se explica más adelante.

Proyectando la ecuación de equilibrio 2.3 en la base reducida Φ , utilizando un criterio tipo Galerkin [24] se tiene que:

$$K_R(\theta) \beta(\theta) = f_R(\theta) \quad (2.25)$$

En donde $K_R(\theta)$ es la matriz de rigidez del sistema reducido, que viene dada por:

$$K_R(\theta) = \Phi^T K(\theta) \Phi \quad (2.26)$$

Y $f_R(\theta)$ es el vector de cargas reducido:

$$f_R(\theta) = \Phi^T f(\theta) \quad (2.27)$$

De esta forma, se busca obtener $\beta(\theta)$, despejando de la Ecuación 2.25. En esta ecuación, se observa que la matriz de rigidez reducida $K_R(\theta)$ tiene dimensión $n_r \times n_r$. Como habitualmente $n_r \ll n_d$, resolver el sistema de ecuaciones 2.25 es mucho más conveniente, desde el punto de vista numérico, que resolver el sistema de ecuaciones del problema original presentado en la Ecuación 2.3. Una vez hallado $\beta(\theta)$, es posible obtener la respuesta aproximada r^A en términos de desplazamiento. Esto es,

$$r(\theta) \approx r^A(\theta) = \gamma^T \Phi \beta(\theta) \quad (2.28)$$

Si se observa la Ecuación 2.28, la precisión del método se ve influenciada por la base reducida Φ , la que puede estar conformada por el vector de respuesta más sus derivadas de primer y segundo orden, evaluadas en el punto de expansión θ^0 :

$$\Phi = \text{orth} \left(\left[u(\theta^0), \frac{\partial u(\theta^0)}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial^2 u(\theta^0)}{\partial \theta_{n_\theta}^2} \right] \right) \quad (2.29)$$

Donde $\text{orth}(X)$ denota la ortogonalización sobre el espacio de columna de X . El punto de expansión θ^0 , al igual que mediante el enfoque con series de Taylor, puede considerarse como el punto para el cual su función pertenencia sea igual a 1. El cálculo analítico de las derivadas puede realizarse siguiendo el método directo presentado por [20], que fue descrito en la sección 2.4.3.1.

Los métodos sustitutos discutidos en esta sección permiten estimar la función de pertenencia de la respuesta con un menor costo numérico. No obstante, esta ganancia en tiempo de cómputo tiene la desventaja de que sólo se obtiene la respuesta en forma aproximada. De esta forma, surge la necesidad de monitorear el error para mantener la calidad de la aproximación. En el capítulo 4 se abordará en detalle este problema.

2.4.4. Método de transformación

Esta metodología fue desarrollada por Hanss [25] para propagar la incertidumbre difusa a través de un modelo numérico. Para ello, $\mu_{\tilde{\theta}_i}$ se discretiza en N_α intervalos $\underline{\theta}_{i,\alpha_j}$ para $j = 1, \dots, N_\alpha$. El esquema presentado en la Figura 2.10 muestra gráficamente el procedimiento para la aplicación del método general de transformación, para un nivel específico α_j , considerando dos variables difusas de entrada $\tilde{\theta}_1$ y $\tilde{\theta}_2$, donde la secuencia de pasos se identifica con los cuadros grises enumerados.

Para el nivel α_j mostrado en la Figura 2.10, hay un intervalo $\underline{\theta}_{1,\alpha_j}$ y un intervalo $\underline{\theta}_{2,\alpha_j}$ asociado a los parámetros de entrada $\tilde{\theta}_1$ y $\tilde{\theta}_2$, respectivamente. Cada uno de estos intervalos se representa, de manera aproximada, a través de un número discreto de puntos. Este proceso es ilustrado mediante los puntos azules de la Figura 2.10.1. El segundo paso de esta técnica consiste en realizar un diseño factorial, considerando

las representaciones discretas de cada intervalo. Lo anterior se ejemplifica en la Figura 2.10.2. Esto implica que se analizan todas las combinaciones posibles de los valores de entrada contenidos en la representación discreta de un intervalo. Para cada punto del diseño factorial, se calculan todas las respuestas $r(\cdot)$ mostrada mediante flechas segmentadas en la Figura 2.10.3. Estas respuestas conforman una colección de puntos discretos como los presentados en la Figura 2.10.4. Luego, los intervalos de salida se obtienen tomando el máximo y mínimo de las respuestas obtenidas del paso anterior. Finalmente, la variable de salida difusa $\tilde{r}$ se compone a partir del intervalo de salida r_{α_j} , acotado por dichos límites, para el nivel específico α_j analizado. Esto último es presentado en en la Figura 2.10.5.

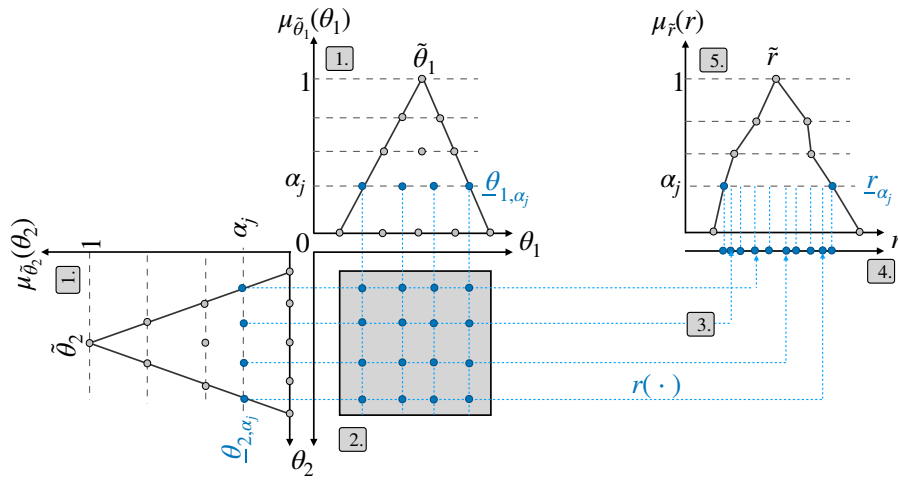


FIGURA 2.10: Esquema metodológico del enfoque de transformación para un nivel de pertenencia α_j , aplicado a dos variables difusas $\tilde{\theta}_1$ y $\tilde{\theta}_2$, con una función de respuesta $r(\cdot)$, para el cálculo de la respuesta difusa $\tilde{r}$.

2.5. Conclusiones del Capítulo 2

En el capítulo 2 de este estudio se presentó la teoría de conjuntos difusos y análisis de intervalos, junto a las estrategias existentes para incorporar la incertidumbre epistémica en sistemas estructurales lineales mediante el uso del MEF. Las distintas metodologías descritas en el estado del arte están limitadas al no admitir que los parámetros inciertos puedan tener dependencia espacial. La estrategia propuesta en este trabajo, explicada en detalle en el capítulo 3, permite suplir esta deficiencia, la que posteriormente será acoplada, en el capítulo 4, a un modelo reducido como el descrito anteriormente para abordar el alto costo computacional asociada los métodos de optimización.

Capítulo 3

APROXIMACIÓN DE LA RESPUESTA MEDIANTE CAMPOS DIFUSOS

3.1. Introducción

La caracterización de los parámetros de entrada por medio de variables difusas, como las descritas en la sección 2.2, asume que las variables en estudio solo se ven afectadas por la incertidumbre epistémica. Esto se ilustró con el ejemplo de la viga en voladizo mostrado en la Figura 2.5b, en el que la carga aplicada es incierta y se caracteriza mediante un conjunto difuso $\tilde{\theta}$, que tiene asociada una función de pertenencia $\mu_{\tilde{\theta}}$. Sin embargo, para otras variables, como las propiedades del suelo de fundación, además de la incertidumbre epistémica, el valor que asumen estos parámetros puede depender de la ubicación espacial, es decir, la magnitud de la variable incierta es también función de la geometría del espacio que se tiene. Así, en este capítulo se introduce el concepto de *campo difuso*, a partir del concepto de campo de intervalo [11, 26], como una herramienta para caracterizar la incertidumbre de variables que admiten dependencia espacial. La presencia de esta dependencia hace necesario discretizar el dominio del modelo, de modo de proyectar la información de los parámetros inciertos al MEF. Dicho lo anterior, en esta sección se define la metodología empleada para propagar la incertidumbre epistémica desde ubicaciones discretas del espacio Ω al sistema estructural; y, por ende, a la respuesta.

3.2. Campos difusos

Considere que la variable ξ es incierta y depende de la coordenada espacial x , esto es denotado por $\xi(x)$, donde x está contenida en el dominio Ω y tanto la coordenada espacial x como el dominio Ω dependen del modelo numérico en estudio. Así, la incertidumbre asociada $\xi(x)$ puede describirse por el *campo difuso* $\tilde{\xi}(x)$. Este se construye a partir de la información disponible en n_b nodos cuya ubicación dentro del dominio Ω se denota como $x_{b,j}$, con $j = 1, \dots, n_b$. Considerando que el dominio Ω es unidimensional, la Figura 3.1 muestra esquemáticamente la caracterización del campo difuso $\tilde{\xi}(x)$, donde se asume que se ha caracterizado la incertidumbre en dos nodos: $x_{b,1}$ y $x_{b,2}$, vale decir, $n_b = 2$. Note que para cada uno de estos nodos, el parámetro de entrada incierto ξ se puede caracterizar mediante una variable difusa $\tilde{\xi}_{b,j}$, a la que es posible asociar una función de pertenencia $\mu_{\tilde{\xi}_{b,j}}(\xi_{b,j})$, con $j = 1, 2$ para el ejemplo de la Figura 3.1. Esta función de pertenencia se asume convexa y se rige

por la definición dada en la sección 2.2. Se debe tener en cuenta que $\xi_{b,j}$ denota el valor del parámetro incierto en el nodo $x_{b,j}$.

Así como la caracterización de una variable difusa por medio de funciones de pertenencia triangulares tiene la ventaja que requiere de escasa información para su construcción, la caracterización mediante campos difusos también otorga el mismo beneficio. Lo anterior se debe a que las funciones de pertinencia triangulares, asociadas a los puntos discretos $x_{b,j}$ del dominio, quedan completamente definidas por los valores de sus vértices como se mostró en la sección 2.2 (ver Figura 2.1 a la derecha).

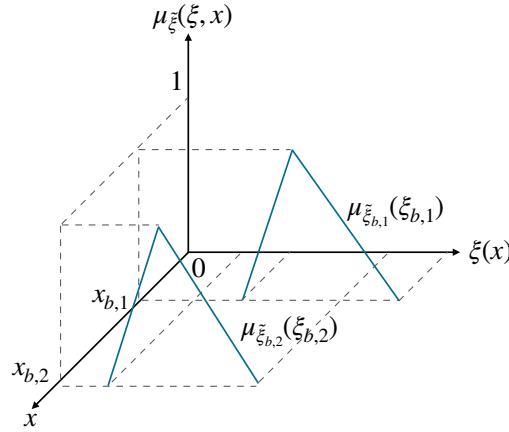


FIGURA 3.1: Representación esquemática de las funciones de pertenencia para la variable difusa $\tilde{\xi}$.

El desafío de la aplicación de un campo difuso está en extender la incertidumbre observada en los n_b nodos a todos los puntos que comprenden el dominio Ω . Note además, que las funciones de pertenencia $\mu_{\tilde{\xi}_{b,1}}(\xi_{b,1})$ y $\mu_{\tilde{\xi}_{b,2}}(\xi_{b,2})$ presentadas en la Figura 3.1, también pueden discretizarse para un nivel de pertenencia específico α , tal como se definió para una variable difusa. Ampliando estos conceptos ya definidos para un campo difuso, se tiene que para un nivel de pertenencia α dado, el campo difuso se reduce a un *campo de intervalo* $\tilde{\xi}_{\alpha}(x)$, el que ha sido estudiado por [11, 26].

Un campo de intervalo $\tilde{\xi}_{\alpha}(x)$ se define por:

$$\tilde{\xi}_{\alpha}(x) = \sum_{j=1}^{n_b} \psi_j(x, X_b) \tilde{\xi}_{b,j,\alpha} \quad (3.1)$$

Donde X_b es una matriz cuyas columnas contienen los vectores de ubicación de los nodos $x_{b,j}$, con $j = 1, \dots, n_b$; $\tilde{\xi}_{b,j,\alpha}$ es el intervalo asociado a la variable difusa $\tilde{\xi}$ en la ubicación $x_{b,j}$ para el nivel de pertenencia α ; y $\psi_j(\cdot, \cdot)$ denota las *funciones base*, que se definen según la siguiente ecuación:

$$\psi_j(x, X_b) = \frac{w_j(x, x_{b,j})}{\sum_{j=1}^{n_b} w_{j_1}(x, x_{b,j_1})}, \quad j = 1, \dots, n_b \quad (3.2)$$

En donde $w_j(\cdot, \cdot)$ es la función de peso definida por:

$$w_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{b,j}) = \frac{1}{(d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{b,j}))^p} \quad (3.3)$$

Donde $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{b,j})$ es la medida de distancia considerada (p.ej. la distancia Euclidiana) entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}_{b,j}$ y p es un número real positivo. Si se observa la Ecuación 3.1, se tiene que el campo de intervalo en una ubicación arbitraria $\mathbf{x}$ se expresa mediante la suma ponderada de los intervalos $\underline{\xi}_\alpha(\mathbf{x}_{b,j})$ en las ubicaciones $\mathbf{x}_{b,j}$, con $j = 1, \dots, n_b$. Note que los pesos asignados a cada uno de los intervalos descritos anteriormente, se determinan a partir de su correspondiente función base $\psi_j(\mathbf{x}, \mathbf{X}_b)$, con $j = 1, \dots, n_b$, definida según la Ecuación 3.2. Y, a su vez, estas funciones base dependen de las funciones de peso, $w_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{b,j})$ con $j = 1, \dots, n_b$. Como se muestra en la Ecuación 3.3, la función de peso corresponde a la función de *ponderación de la distancia inversa*, que fue introducida por [27].

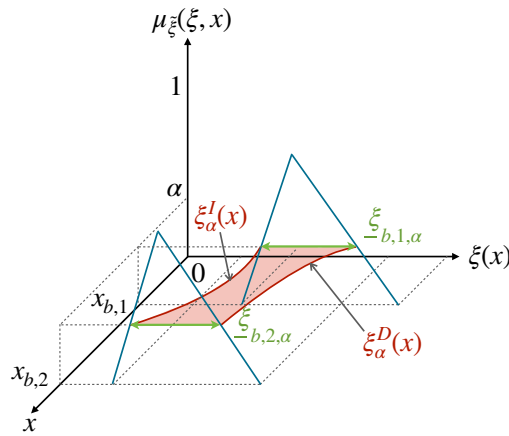


FIGURA 3.2: Representación esquemática del campo de intervalo resultante para un nivel de pertenencia α para el campo difuso $\tilde{\xi}$, considerando dos nodos.

Considere el caso particular en que $n_b = 2$ y el dominio Ω es unidimensional, como se ilustró con la Figura 3.1. El campo de intervalo resultante para un nivel de pertenencia α para el campo difuso $\tilde{\xi}$, bajo los nodos y espacio descritos previamente, es esquematizado en la Figura 3.2. Para un corte α , cada función de pertenencia $\mu_{\tilde{\xi}_{b,1}}(\xi_{b,1})$ y $\mu_{\tilde{\xi}_{b,2}}(\xi_{b,2})$ (ambas en color celeste en la figura), se discretizan en los intervalos $\underline{\xi}_{b,1,\alpha}$ y $\underline{\xi}_{b,2,\alpha}$. Estos intervalos se representan gráficamente con las flechas verdes de doble sentido. Note que la aplicación de la función de peso de la Ecuación 3.3 permite obtener los intervalos en ubicaciones distintas a los nodos. Es decir, mediante la función de peso es posible inferir el intervalo asociado a la variable de entrada para una posición arbitraria $x \in \Omega$. Esto último es representado por el área roja de la Figura 3.2, que muestra los intervalos resultantes para $x_{b,1} \leq x \leq x_{b,2}$, donde $\xi_\alpha^I(x)$ corresponde al límite inferior y $\xi_\alpha^D(x)$ corresponde al límite superior del campo de intervalo $\underline{\xi}_\alpha(x)$.

La acción de la función de peso también puede visualizarse mediante el siguiente ejemplo. La Figura 3.3 muestra el campo de intervalo obtenido tras considerar que la propiedad estructural ξ de una viga, de longitud 10 [m], está sujeta a incertidumbre espacial. Considere que se definieron dos nodos en el dominio $[0, 10]$ en $x_1 = 2$ y $x_2 = 6$ [m], en los que se asume que el valor de ξ es conocido y fluctúa entre $[176, 198]$ para la posición $x_1 = 2$ [m], y varía entre $[184, 193]$ para la posición $x_2 = 6$ [m]. La parte de arriba de la Figura 3.3 muestra el límite superior (en naranja) e inferior (en azul) del campo de intervalo resultante. La porción inferior de la figura representa las funciones base calculadas según la función de peso de la Ecuación 3.3 para un valor de $p = 2$. Note que la función base $\psi_1(x)$ alcanza el valor 1 para la posición $x_1 = 2$ [m] y 0 para $x_2 = 6$ [m], mientras que para la función base $\psi_2(x)$, ocurre lo contrario.

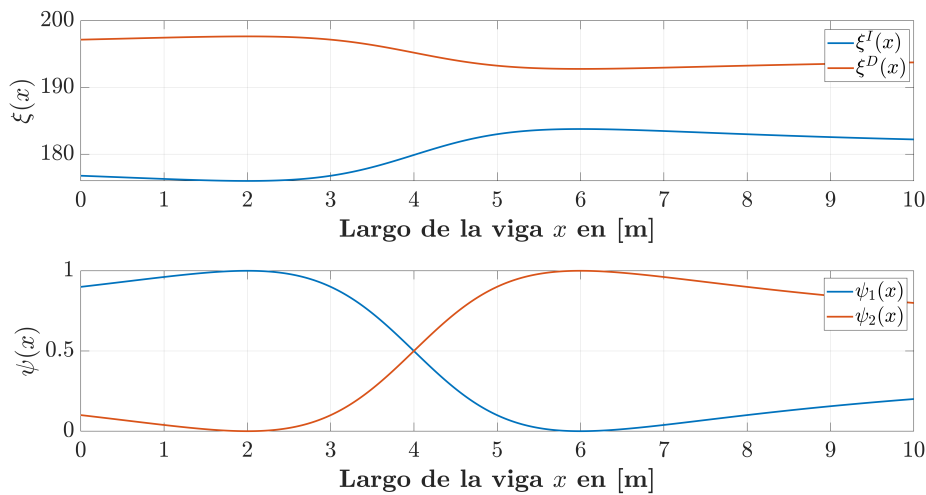


FIGURA 3.3: Arriba, ilustración del esquema de interpolación del inverso de la distancia para $p = 2$, considerando el campo resultante al utilizar 2 intervalos escalares. Abajo, resultado de las funciones base interpoladas para 2 puntos de control en el dominio.

3.3. Discretización del campo difuso

Con el ejemplo de la viga en voladizo de la Figura 2.5 se ilustró el efecto sobre el modelo de considerar una variable como incierta. Sin embargo, el esquema metodológico para incluir parámetros que, además de ser inciertos, dependen de alguna coordenada espacial es ligeramente distinto a lo expuesto en la sección 2.2. Como se esbozó con anterioridad, tanto los campos de intervalos como los campos difusos permiten caracterizar la incertidumbre asociada a una cantidad $\xi(x)$ en cualquier ubicación Ω del dominio en estudio. Para ilustrar este punto considere el esquema de la Figura 3.4, que considera dos sistemas estructurales sencillos a los cuales se desea dar solución mediante MEF. La Figura 3.4.a muestra una viga en voladizo en cuyo extremo libre se aplica una carga puntual. Note que la viga se puede representar como un elemento unidimensional. La viga es discretizada con dos elementos finitos de igual longitud (vale decir, el número de elementos $n_e = 2$) conformados por dos nodos, donde cada elemento es denotado por $(\cdot)$. Para aplicar el método de elementos finitos, es necesario que tanto el elemento (1) como el elemento (2) tengan asociadas las propiedades geométricas y de los materiales, así como las condiciones de carga a las que está sometido el sistema. En el caso en que, por ejemplo, una

propiedad de los materiales sea representada mediante un campo difuso, se hace necesario establecer cómo dicha propiedad se representa de manera discreta a nivel de cada elemento. Una manera de realizar esta discretización corresponde a aplicar el método del punto medio [28], que consiste en asumir que estas propiedades, dentro de un determinado elemento finito, se pueden describir completamente por su valor en el centroide de dicho elemento finito, cuya coordenada se denota por $x_{C,q}$, con $q = 1, \dots, n_e$. En la figura, el centroide de cada elemento finito es representado por un punto rojo: $x_{C,1}$ para el primer elemento y $x_{C,2}$ para el segundo.

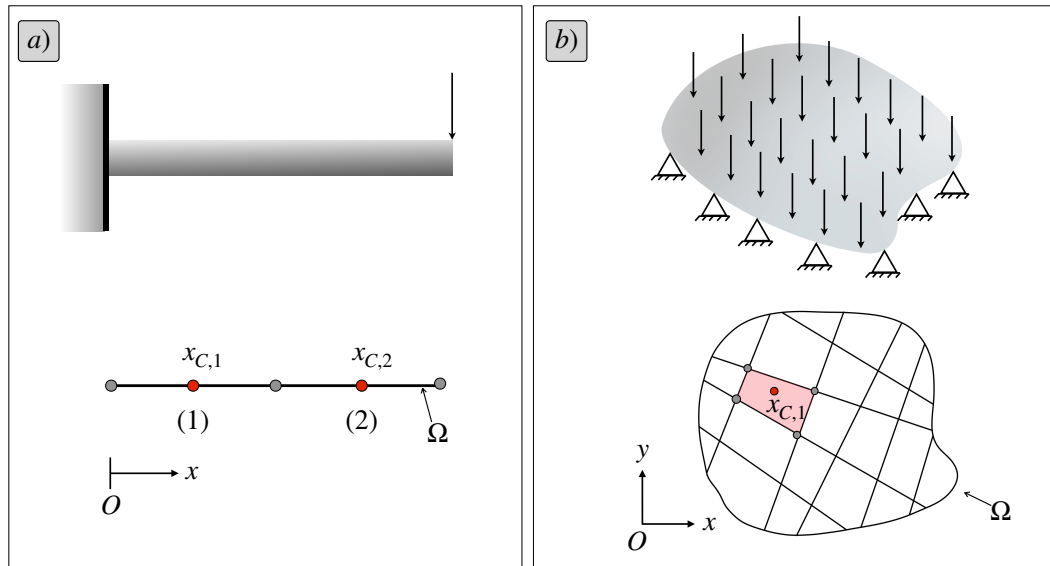


FIGURA 3.4: Discretización del espacio Ω . a) Discretización unidimensional (1D) de una viga en voladizo con elementos finitos de dos nodos. b) Discretización de un elemento bidimensional (2D) con elementos finitos de 4 nodos.

Considere ahora la Figura 3.4.b que presenta una placa bidimensional sobre apoyos articulados y bajo la acción de una carga distribuida. Note que al igual que para el caso unidimensional, este sistema se puede discretizar en n_e elementos finitos, pero que ahora corresponden a elementos cuadriláteros de 4 nodos. Se considera que una o más propiedades de la placa son inciertas y pueden estar modeladas mediante un campo difuso. De donde, es necesario discretizar el campo difuso para proyectar esta información a cada elemento finito para aplicar el MEF, tal como se explicó con el caso de la viga en voladizo anteriormente. Por ende, para cada uno de los elementos finitos que comprende el modelo, se puede asumir que las propiedades inciertas pueden ser caracterizadas por su valor correspondiente en el punto medio de dicho elemento. En la figura, se destaca en rojo el elemento finito (1) con su respectivo centroide $x_{C,1}$. Se debe tener en consideración que esta forma de representación puede extenderse a elementos de más dimensiones. Indudablemente, la calidad de la respuesta obtenida tras discretizar el modelo dependerá de la selección del número de elementos finitos y su ubicación dentro del dominio Ω .

El ejemplo descrito previamente pone en evidencia que cuando se modela con elementos finitos, se trabaja el sistema estructural de forma discreta. Por ende, al considerar que un parámetro de entrada puede caracterizarse mediante un campo difuso $\tilde{\xi}$, como el descrito en la sección anterior, surge la necesidad de traspasar la información contenida en la discretización del campo difuso a los elementos finitos del modelo. Suponiendo que la malla de elementos finitos es lo suficientemente refinada, se asume que este parámetro de entrada adquiere un valor constante dentro de cada elemento. En particular, se considera que la propiedad $\tilde{\xi}(x)$ dentro de un determinado elemento finito de un modelo se puede describir completamente por su valor en el centroide de ese elemento finito, tal como se explicó recientemente.

Matemáticamente, lo anterior puede expresarse como:

$$\tilde{\xi}(x) = \tilde{\xi}(x_{C,q}), \quad x \in \Omega_q, \quad q = 1, \dots, n_e \quad (3.4)$$

Donde $x_{C,q}$ es el centroide del q -ésimo elemento finito del modelo, Ω_q denota el dominio asociado al q -ésimo elemento finito y n_e corresponde al número total de elementos finitos del modelo. De esta forma, la aplicación del método del punto medio implica que el desafío de capturar la incertidumbre espacial de una propiedad, asociada a un determinado sistema, se reduce a monitorear el comportamiento de ésta en los centroides de cada elemento finito. En otras palabras, la incertidumbre en el parámetro $\tilde{\xi}$ está representada por un vector $\tilde{\xi}_C$ de dimensión $n_e \times 1$, que permite almacenar todos los valores que asume el parámetro incierto $\tilde{\xi}$ en las ubicaciones de los centroides del sistema. Es decir,

$$\tilde{\xi}_C = [\tilde{\xi}_{C,1}, \dots, \tilde{\xi}_{C,n_e}]^T \quad (3.5)$$

Considerando lo ya expuesto en la Ecuación 3.1, se tiene que el valor que asume el vector $\tilde{\xi}_C$ depende de las magnitudes inciertas que el parámetro $\tilde{\xi}$ adquiere en los n_b puntos de control. Esto es,

$$\tilde{\xi}_C = \Psi(X_C, X_b) \tilde{\xi}_b \quad (3.6)$$

Donde X_C es una matriz cuyas columnas contienen las coordenadas nodales de cada centroide de los elementos finitos del modelo; $\Psi(X_C, X_b)$ es una matriz de dimensión $n_e \times n_b$ definida por:

$$\Psi(X_C, X_b) = \begin{bmatrix} \psi_1(x_{C,1}, X_b) & \dots & \psi_{n_b}(x_{C,1}, X_b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(x_{C,n_e}, X_b) & \dots & \psi_{n_b}(x_{C,n_e}, X_b) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Y $\tilde{\xi}_b$ es un vector de dimensión $n_b \times 1$ que contiene los valores del parámetro incierto en cada punto de control, es decir:

$$\tilde{\xi}_b = [\tilde{\xi}_{b,1}, \dots, \tilde{\xi}_{b,n_b}]^T \quad (3.8)$$

Para ilustrar lo anterior, observe el esquema de la Figura 3.5, que considera el elemento finito (1) del ejemplo de la viga en voladizo de la Figura 3.4.a. Asuma que existe un único parámetro de entrada incierto caracterizado por el campo difuso $\tilde{\xi}$, del cual se conoce información en las ubicaciones $x_{b,1}$ y $x_{b,2}$. Estas coordenadas dentro del elemento finito se representan con puntos celestes. Note que dichas ubicaciones no coinciden con la posición del centroide del elemento, denotado por $x_{C,1}$

(e ilustrado por el punto rojo), que corresponde a la coordenada de interés. Sin embargo, observe que la representación discreta del campo difuso mediante intervalos, para un nivel de pertenencia α dado, permite proyectar al centroide la magnitud del parámetro ξ . Esto se debe a que es posible obtener el intervalo asociado a cualquier ubicación entre $x_{b,1}$ y $x_{b,2}$ aplicando la formulación recientemente descrita. Lo anterior, permite propagar la incertidumbre desde los n_b puntos en los que se ha caracterizado la incertidumbre del parámetro de entrada, hacia cada uno de los n_e elementos finitos del modelo numérico. En la figura, la proyección es representada por la flecha roja segmentada, mientras que el intervalo asociado al centroide se representa con la flecha roja de doble sentido. Esta proyección se realiza mediante la Ecuación 3.6, que aplica las funciones base ψ_j definidas a partir de la función de peso w_j . Gracias a estas funciones, es posible proyectar a los centroides de cada elemento finito la información contenida en los n_b nodos donde la incertidumbre ha sido caracterizada. Esto se obtiene al considerar como medida de distancia en la Ecuación 3.3 la existente entre la colección de centroides, tal como se observa en la Ecuación 3.7. De donde, mientras más cercano se encuentre un centroide específico a un nodo arbitrario del dominio Ω , la función base ψ_j evaluada en ese centroide tenderá a uno, es decir, el respectivo elemento finito asumirá como magnitud del parámetro de entrada el valor definido para dicho nodo. Esto último puede observarse en el ejemplo de la viga mostrado en la Figura 3.3.

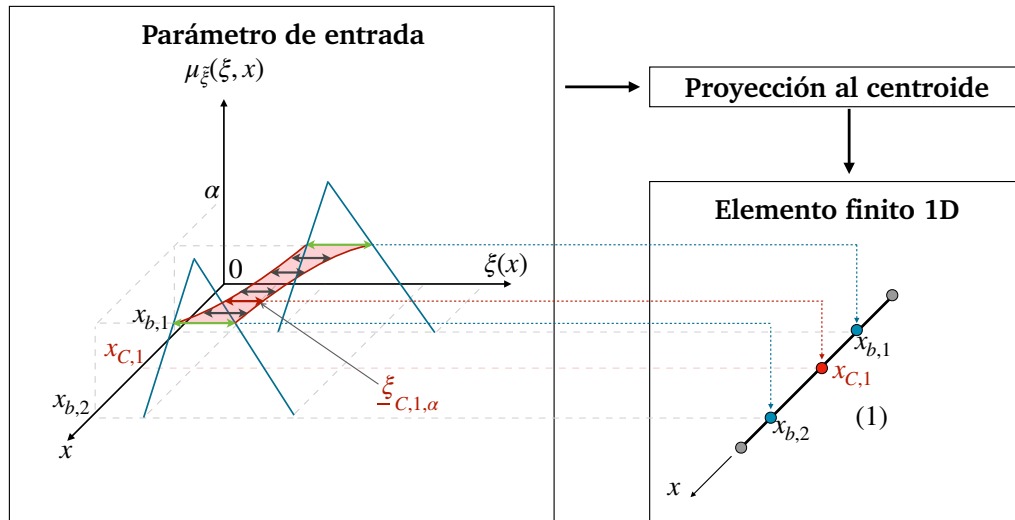


FIGURA 3.5: Representación esquemática de la proyección del campo de intervalo resultante para un nivel de pertenencia α , para el campo difuso ξ , considerando dos nodos con información y un elemento finito 1D representado por su centroide.

Así, el procedimiento para asignar las propiedades a cada elemento del MEF, tomando en cuenta que una o más propiedades se representan a través de un campo difuso, puede resumirse como se presenta a continuación:

1. Se define un nivel de pertenencia α para el cual el campo difuso se reduce a un campo de intervalos. Este proceso es ilustrado en la Figura 3.5.

2. Se define la malla de elementos finitos asociada a la estructura modelada. Para cada elemento, se asigna su centroide, tal como se observa en la Figura 3.4.
3. Se obtienen los intervalos asociados al nivel de pertenencia α en cada punto de control (denotados por las flechas verdes de la Figura 3.5).
4. Se calculan las distancias Euclidianas entre los centroides contenidos en la malla del MEF, y los nodos donde se dispone de información del parámetro incierto de entrada (caracterizado como variable difusa), aplicando la Ecuación 3.3.
5. Se aplica la función de peso al dominio generado en (4) y calculan las funciones base asociadas a cada nodo, como se ilustra en la Ecuación 3.7.
6. Con las funciones base de la Ecuación 3.6, se obtiene el intervalo asociado a los centroides dentro del dominio Ω . Esto permite obtener los límites dentro de los cuales se encuentra la propiedad del modelo para dicha ubicación.

Tras realizar la proyección, es posible aplicar lo discutido la sección 2.2 para obtener la función de pertenencia asociada a la respuesta. Esto se discute con más profundidad en la siguiente sección.

3.4. Respuesta estructural difusa de sistemas lineales con incertidumbre espacial

Considere un sistema estructural modelado con elementos finitos, cuyos parámetros estructurales pueden representarse mediante variables y campos difusos, y donde las solicitaciones de la estructura están caracterizadas únicamente por variables difusas. Note que esto implica que sólo los parámetros estructurales admiten dependencia espacial. Cabe destacar que, por simplicidad, no se consideró la representación de las solicitaciones por medio de campos difusos. No obstante, la metodología propuesta sí puede extenderse para su aplicación.

Bajo la acción de cargas estáticas, la ecuación que permite determinar la respuesta de un sistema lineal en función de sus parámetros estructurales y condiciones de carga, para los n_d grados de libertad de la estructura es:

$$K(\theta, \xi_b)u(\theta, \xi_b) = f(\theta) \quad (3.9)$$

Donde $K(\theta, \xi_b)$ denota la matriz de rigidez asociada a las propiedades del sistema de dimensión $n_d \times n_d$; $f(\theta)$ es un vector de $n_d \times 1$ que representa el vector de cargas externas, y $u(\theta, \xi_b)$ corresponde al vector respuesta del sistema de dimensión $n_d \times 1$. Considere además, que la matriz $K(\theta, \xi_b)$ admite la siguiente representación paramétrica:

$$K(\theta, \xi_b) = K_0 + \sum_{k=1}^{n_K} K_k p_k(\theta, \xi_b) \quad (3.10)$$

En donde, $K_k, k = 1, \dots, n_K$ son matrices de dimensión $n_d \times n_d$ que no se ven afectadas por los parámetros de entrada inciertos θ o ξ_b ; y $p_k(\theta), k = 1, \dots, n_K$ son funciones escalares que dependen de los parámetros de entrada θ y ξ_b .

Tal como se formuló para el caso en que los parámetros de entrada son representados por variables difusas, la respuesta asociada a un grado de libertad específico, al considerar la caracterización con campos difusos, estará dada por lo definido en la

Ecuación 2.4, pero considerando que la respuesta estructural ahora está en función de θ y ξ_b . Esto es:

$$r(\theta, \xi_b) = \gamma^T u(\theta, \xi_b) \quad (3.11)$$

Note que la respuesta de interés $r(\theta, \xi_b)$ depende de los valores que asumen θ y ξ_b , como se muestra en las Ecuaciones 3.9 y 3.10. Por ende, la respuesta en sí se convierte incierta y posee un conjunto difuso $\tilde{r}$ asociado al que se puede asignar una función de pertenencia $\mu_{\tilde{r}}(r)$, al igual que como se estudió para el caso de la caracterización con variables difusas.

Por tanto, para cada nivel de pertenencia α_l , con $l = 1, \dots, n_c$, la respuesta de interés r está contenida en un intervalo r_{α_l} :

$$r_{\alpha_l} = [r_{\alpha_l}^I, r_{\alpha_l}^D] \quad (3.12)$$

Con $r_{\alpha_l}^I$ y $r_{\alpha_l}^D$ los límites inferior y superior de r_{α_l} , respectivamente. Estos límites se obtienen resolviendo los problemas de optimización de las Ecuaciones 3.13 y 3.14.

$$r_{\alpha_l}^I = \min_{\theta, \xi_b} (r(\theta, \xi_b)), \theta_i \in \underline{\theta}_{i, \alpha_l}, i = 1, \dots, n_\theta, \xi_{b,j} \in \underline{\xi}_{b,j, \alpha_l}, j = 1, \dots, n_b \quad (3.13)$$

$$r_{\alpha_l}^D = \max_{\theta, \xi_b} (r(\theta, \xi_b)), \theta_i \in \underline{\theta}_{i, \alpha_l}, i = 1, \dots, n_\theta, \xi_{b,j} \in \underline{\xi}_{b,j, \alpha_l}, j = 1, \dots, n_b \quad (3.14)$$

De donde, dado que para cada nivel de pertenencia α_l hay asociado un intervalo de la respuesta r_{α_l} , es posible determinar de forma discreta la función de pertenencia de la respuesta, tal como se ilustró para el caso en el que sistema admitía únicamente variables difusas (ver Figura 2.6 y 2.7).

3.5. Estrategias para cuantificar la respuesta difusa de sistemas lineales bajo campos difusos

En el capítulo anterior se presentaron distintas técnicas para incorporar la incertidumbre epistémica en sistemas estructurales lineales bajo cargas estáticas. Estas estrategias se abordaron considerando que no existe dependencia espacial de los parámetros inciertos. Es decir, se estudió el problema resultante de la caracterización de los parámetros de entrada mediante variables difusas. Asimismo, se enfatizó en la importancia de representar de manera aproximada la función de pertenencia de la respuesta, y de las ventajas que determinadas técnicas entregaban para su construcción. Por otro lado, para abordar el caso en que estos parámetros inciertos admiten dependencia espacial, en la sección 3.2 de este capítulo se introdujo la caracterización de parámetros inciertos mediante campos difusos. Lo anterior se realizó a partir del concepto de campo de intervalo, tal que fuese posible obtener la respuesta estructural mediante una función de pertenencia que pueda construirse considerando las técnicas disponibles en la literatura. Asimismo, en la sección 3.3 se destacó la necesidad de propagar la incertidumbre tomando en cuenta la discretización del dominio Ω asociada al MEF.

Tras proyectarse el campo difuso al modelo estructural, el desafío se reduce a resolver una colección de problemas de análisis de intervalos, muy parecidos a los que se expuso en la sección 2.4. Esto último se debe a que para un corte α_l , el campo difuso se reduce a un campo de intervalos $\underline{\xi}_\alpha(x)$ que permite expandir, a cada ubicación del

dominio Ω , la información contenida en los n_b puntos de control. Para ello, se obtienen los intervalos asociados al corte α_l en cada punto de control $x_{b,j}$, $j = 1, \dots, n_b$. Posteriormente, por medio de las funciones base presentadas en la sección 3.3, se propaga la incertidumbre alojada en los n_b puntos de control a los n_e elementos finitos considerados en la discretización del modelo. Note que esto permite obtener el intervalo asociado a cada elemento finito, el que se representó mediante su centroide $x_{C,q}$, con $q = 1, \dots, n_e$; como mostró en la Figura 3.5. Luego, aplicando técnicas de análisis de intervalos es posible estimar los límites de la respuesta del sistema para el nivel α_l estudiado, dando solución a las ecuaciones 3.13 y 3.14. Bajo esta línea, las técnicas ya descritas en el Capítulo 2 pueden aplicarse para determinar la función de pertenencia $\mu_{\tilde{r}}(r)$ asociada a la respuesta difusa $\tilde{r}$.

A continuación, se presentan las técnicas que se han considerado hasta ahora en la literatura para resolver este problema. Estas corresponden a la optimización directa y el método del vértice. Por la explicación dada en el párrafo anterior, ambas técnicas están descritas como herramientas para sortear el problema de análisis de intervalos resultante de la evaluación de un corte α_l .

3.5.1. Optimización directa

Para la cuantificación de la respuesta estructural bajo campos difusos, la estrategia de optimización directa permite determinar el nivel inferior y superior de la respuesta de un modelo de elementos finitos [11]. El proceso de optimización contempla el mismo procedimiento que para el caso en que se consideró la caracterización mediante variables difusas, aplicando un algoritmo de búsqueda en el dominio definido por el intervalo de entrada de los parámetros inciertos considerados. La respuesta dependiente de estas variables caracterizadas como variables difusas θ o campos difusos ξ_b , para dicho intervalo es:

$$\underline{r}(\theta, \xi_b) = \left\{ r(\theta, \xi_b) \mid \left(\theta \in \underline{\theta} \wedge \xi_b \in \underline{\xi}_b \wedge x \in \Omega \right) \wedge \left(r(\theta, \xi_b) = \gamma^T K^{-1}(\theta, \xi_b) f(\theta) \right) \right\} \quad (3.15)$$

Donde $\underline{r}(\theta, \xi_b)$ es el intervalo obtenido, θ el vector de parámetros inciertos contenidos en el intervalo $\underline{\theta}$, y ξ_b es el vector correspondiente a los parámetros inciertos caracterizados como campos difusos (dependientes de la coordenada espacial $x \in \Omega$) que están contenidos en el intervalo $\underline{\xi}_b$. Nuevamente, la solución de un problema de intervalo de elementos finitos se convierte en un problema de optimización, definido por las Ecuaciones 3.16 y 3.17. Note que la función objetivo se obtiene de combinar las Ecuaciones 3.9 y 3.11.

$$r^I = \min_{\theta \in \underline{\theta} \wedge \xi_b \in \underline{\xi}_b} r(\theta, \xi_b) = \gamma^T K^{-1}(\theta, \xi_b) f(\theta) \quad (3.16)$$

$$r^D = \max_{\theta \in \underline{\theta} \wedge \xi_b \in \underline{\xi}_b} r(\theta, \xi_b) = \gamma^T K^{-1}(\theta, \xi_b) f(\theta) \quad (3.17)$$

En donde, r^I e r^D denotan los límites superior e inferior hallados tras el proceso de optimización, del intervalo resultante $\underline{r}$.

3.5.2. Método del vértice

El método del vértice corresponde a un caso particular del método de transformación descrito en la sección 2.4.4, que es aplicable cuando la función $r(\cdot)$ es monótona. Esta estrategia fue introducida por [29] y permite propagar la incertidumbre difusa a través de un modelo numérico. Este método proporciona un resultado exacto para el problema de optimización, siempre que se cumpla la hipótesis de que $r(\cdot)$ sea monótona. Dicho problema es formulado a partir del análisis de intervalos, al ser un caso especial del enfoque de optimización descrito anteriormente. La Figura 3.6 esquematiza el procedimiento de aplicación del método del vértice, para un nivel específico α , considerando un campo difuso $\xi_{b,1}$ con un solo punto de control y una única variable difusa θ_1 .

El primer paso para obtener la respuesta de interés $\tilde{r}$, es discretizar en N_α intervalos las funciones de pertenencia de los parámetros inciertos considerados en el análisis $\mu_{\tilde{\xi}_{b,1}}(\xi_{b,1})$ y $\mu_{\tilde{\theta}_1}(\theta_1)$. Así, para un nivel de pertenencia específico α , se obtienen los intervalos $\tilde{\xi}_{b,1,\alpha}$ y $\theta_{1,\alpha}$, respectivamente; los que se representan de manera aproximada a través de los *vértices* del intervalo resultante. Este proceso es ilustrado mediante los puntos azules de la Figura 3.6.1. El segundo paso consiste en realizar un diseño factorial considerando los vértices, como se ejemplifica en la Figura 3.6.2. Luego, el tercer paso corresponde a, para cada una de estas combinaciones, calcular las respuestas tras la evaluación de la función $r(\cdot)$. Este punto es mostrado mediante las flechas segmentadas en la Figura 3.6.3. Así, el intervalo de salida $\underline{r}_\alpha$ queda definido por los vértices obtenidos en el paso anterior, tal como se aprecia en la Figura 3.6.4. Finalmente, la variable de salida difusa $\tilde{r}$ se compone a partir de dicho intervalo para el nivel de pertenencia α como se observa en la Figura 3.6.5.

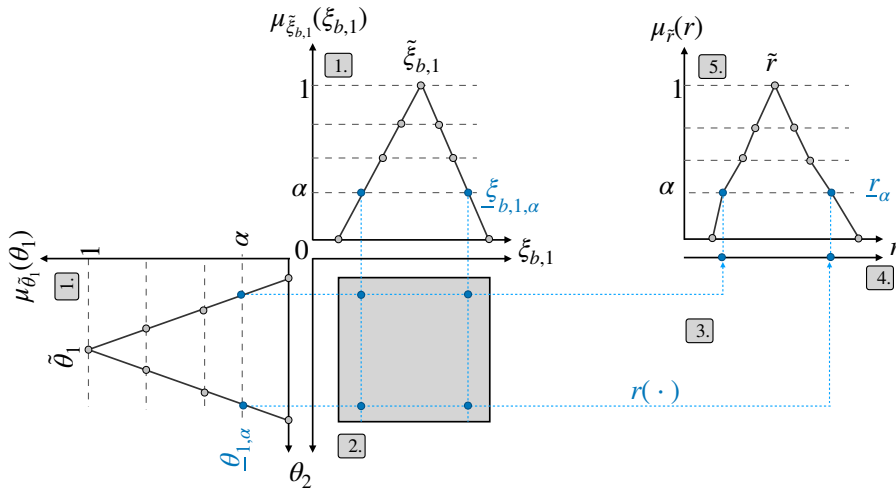


FIGURA 3.6: Esquema metodológico del método del vértice para un nivel de pertenencia α , aplicado a la variable difusa θ_1 y al campo difuso $\xi_{b,1}$, considerando una función de respuesta $r(\cdot)$ monótona, para el cálculo de la respuesta difusa $\tilde{r}$.

3.6. Conclusiones del Capítulo 3

En el capítulo 3 de este trabajo se introdujo el concepto de campo difuso, el que se expuso como una herramienta para caracterizar parámetros inciertos que admitieran dependencia espacial. Se mostró la formulación del problema de elementos finitos considerando que las variables del sistema estaban representadas mediante campos difusos. Para ello, se destacó la necesidad de discretizar el espacio y propagar la información contenida en ubicaciones discretas del MEF. Asimismo, se presentaron las distintas metodologías disponibles en la literatura que permiten hallar la función de pertenencia de la respuesta. En el próximo capítulo se abordará cómo sortear los costos numéricos asociados a la aplicación práctica de esta metodología.

Capítulo 4

APROXIMACIÓN DE LA RESPUESTA MEDIANTE MODELOS REDUCIDOS

4.1. Introducción

En los capítulos previos se estudió cómo incorporar la incertidumbre presente en los parámetros de entrada de un sistema estructural lineal elástico a un modelo de elementos finitos. Para ello, se expuso la teoría del análisis difuso como una herramienta adecuada para la cuantificación de la incertidumbre alojada en las propiedades de la estructura y condiciones de carga. Asimismo, se analizó cómo abordar el problema cuando las propiedades inciertas de la estructura dependen de una coordenada espacial. En dicho caso, se propuso su caracterización por medio de campos difusos y se detalló el procedimiento de discretización de este, para incorporar su información al MEF. Ambas estrategias para cuantificar la incertidumbre en los parámetros de entrada (variables y campos difusos) permiten propagar la incertidumbre a la respuesta de la estructura, mediante la etapa de modelización.

Para propagar esta incertidumbre, se presentaron diversos enfoques que permiten cuantificar la respuesta bajo variables y campos difusos. Sin embargo, la aplicación práctica de estas estrategias puede ser bastante costosa desde un punto de vista numérico. Existe un costo sustancial en la formulación del modelo de elementos finitos, alojado en la discretización del campo difuso y el ensamblaje de las matrices de rigidez, así como en el cálculo de su inversa para obtener la respuesta en desplazamientos. Asimismo, para hallar los límites superior e inferior de la función de pertenencia de la respuesta (para un nivel de pertenencia determinado), los métodos de optimización directa requieren de la evaluación de la función objetivo en reiteradas ocasiones. De donde, note que es necesario realizar la discretización del campo difuso, el ensamblaje y cálculo de la inversa de la matriz de rigidez para cada evaluación de la función objetivo.

Una forma de sortear este problema corresponde al uso de un modelo aproximado o sustituto como, por ejemplo, un *modelo de orden reducido* que permite proyectar las ecuaciones de equilibrio del sistema completo en una base de menor dimensión que la original [12]. En este capítulo se detalla la formulación del modelo de orden reducido considerando la caracterización de los parámetros de entrada mediante variables y campos difusos.

4.2. Formulación del modelo de orden reducido considerando campos difusos

En la sección 2.4.3.3 se introdujo el concepto de modelo de base reducida como una herramienta para hallar la respuesta aproximada $r^A(\theta)$, para el caso en que se desee incorporar la acción de un colección parámetros inciertos θ sobre un sistema estructural lineal elástico. A continuación, se presenta la formulación de esta técnica extendiendo su aplicación para el escenario en que se requiera caracterizar los parámetros de entrada, referentes a las propiedades de la estructura, como campos difusos según lo expuesto en la sección 3.2. Tenga en cuenta que, en dicho caso, la incertidumbre de estas propiedades se reduce a la información contenida en los puntos de control, tal como se aprecia de la ecuación 3.6.

4.2.1. Respuesta estructural difusa de sistemas lineales considerando un modelo de orden reducido

Considere el modelo lineal estático que se discutió en el Capítulo 3, representado por la ecuación 3.9. Este modelo admite n_θ parámetros inciertos que pueden ser caracterizados por medio de variables difusas y n_b puntos de control que almacenan todos los posibles valores que un parámetro incierto ξ puede asumir en los puntos de control de una estructura. La respuesta aproximada en términos de desplazamiento $u^A(\theta, \xi_b)$, dependiente de las variables y campos difusos considerados, puede ser expresada como la combinación lineal de una serie de componentes conocidas. Estas componentes constituyen la *base reducida* Φ , cuya construcción se detallará en la sección 4.2.2. De donde, la expresión para obtener el desplazamiento aproximado viene dada por:

$$u(\theta, \xi_b) \approx u^A(\theta, \xi_b) = \Phi \beta(\theta, \xi_b) \quad (4.1)$$

Donde Φ , es una matriz de dimensión $n_d \times n_r$ cuyas columnas se componen de los vectores ϕ_i , $i = 1, \dots, n_r$ y $\beta(\theta, \xi_b)$ es un vector de $n_r \times 1$ cuyos componentes dependen de los parámetros inciertos. Para hallar $u^A(\theta, \xi_b)$ es posible aplicar un procedimiento de *aproximación residual ponderada* [30]. Es decir, mediante la suma de un determinado número de componentes se puede construir la respuesta aproximada del sistema, donde estas componentes se alojan en la base reducida Φ . Una forma de realizar este procedimiento es aplicando *métodos de Galerkin* [31], los que han sido ampliamente usados en el campo de los métodos de elementos finitos para el cálculo de la matriz de rigidez global de una estructura [30]. Estos métodos permiten convertir un problema de operadores continuos (p. ej. sistemas descritos por ecuaciones diferenciales) en un problema discreto, aplicando restricciones lineales determinadas por conjuntos finitos de funciones base. Así, la respuesta del sistema puede ser aproximada por una suma finita de n_r componentes ϕ_i . Formulando la ecuación de equilibrio 3.9, que admite la caracterización de los parámetros de entrada por medio de variables y campos difusos, mediante la base reducida Φ utilizando el método de Galerkin (ver [24] para mayor detalle), se obtiene:

$$K_R(\theta, \xi_b) \beta(\theta, \xi_b) = f_R(\theta) \quad (4.2)$$

En donde $K_R(\theta, \xi_b)$ es la matriz de rigidez del sistema reducido, que viene dada por:

$$K_R(\theta, \xi_b) = \Phi^T K(\theta, \xi_b) \Phi \quad (4.3)$$

Y $f_R(\theta)$ es el vector de cargas reducido:

$$f_R(\theta) = \Phi^T f(\theta) \quad (4.4)$$

Note nuevamente que esta formulación admite la caracterización mediante campos difusos únicamente de las propiedades estructurales del sistema. En estas ecuaciones, se observa que la matriz de rigidez reducida $K_R(\theta, \xi_b)$ tiene dimensión $n_r \times n_r$, y que el vector de fuerzas reducido $f_R(\theta)$ tiene dimensión $n_r \times 1$. Una vez proyectada la información del sistema sobre la base reducida, el problema se reduce a hallar $\beta(\theta, \xi_b)$ resolviendo la ecuación 4.2. Esto resulta muy conveniente desde un punto de vista numérico, pues involucra la resolución de un sistema lineal de n_r ecuaciones. Por tanto, es posible obtener la respuesta aproximada r^A en términos de desplazamiento. Esto es,

$$r(\theta, \xi_b) \approx r^A(\theta, \xi_b) = \gamma^T \Phi \beta(\theta, \xi_b) \quad (4.5)$$

Observe que la precisión del método se ve influenciada por la construcción de la base reducida Φ . Tras obtener la expresión para la respuesta de la ecuación 4.5, es posible aplicar un algoritmo de optimización, como se discutió en las secciones anteriores, para determinar la función de pertenencia de la respuesta. Este procedimiento se detalla en breve.

4.2.2. Construcción de la base reducida

Como se esbozó con anterioridad, es de interés representar la respuesta del modelo mediante una base reducida Φ , que permita representar el sistema original con un menor costo numérico. Existen diversas técnicas para la construcción de esta base según la literatura. Por ejemplo, el trabajo de [32] propone el *método de snapshots* que utiliza la información de simulaciones completas pero para un grupo específico de muestras llamadas *puntos clave*. Para este método, la elección de estos puntos clave es de suma importancia porque tiene un fuerte efecto en la precisión de la respuesta. Así, la elección de una cantidad muy pequeña de estos puntos puede producir soluciones inexactas. Y, por el contrario, si el número de puntos clave es demasiado grande, la base será grande, lo que reduce la eficiencia numérica.

Una alternativa más económica en términos computacionales y que incluye parámetros inciertos, corresponde a la presentada en el trabajo de [33], que está basada en las estrategias de optimización presentadas por [34]. En este estudio, se propone construir la base reducida con la información de la sensibilidad de la respuesta bajo la acción de la colección de parámetros inciertos analizados. Para ello, es necesario realizar un único análisis exacto del sistema y obtener las derivadas parciales de primer orden del vector de desplazamientos, respecto a cada uno de estos parámetros. Para el cálculo de dichas derivadas, note que la matriz de rigidez del sistema $K(\theta, \xi_b)$ admite la representación paramétrica de la ecuación 3.10. De donde, las componentes que constituirán la base reducida utilizada en esta propuesta se calculan derivando la expresión de la ecuación de equilibrio, como se mostró en la sección 2.4.3.1.

Reemplazando la expresión paramétrica de la matriz de rigidez en la ecuación de equilibrio, se tiene que:

$$\left(K_0 + \sum_{k=1}^{n_K} K_k p_k(\theta, \xi_b) \right) u(\theta, \xi_b) = f(\theta) \quad (4.6)$$

$$K_0 u(\theta, \xi_b) + \sum_{k=1}^{n_K} K_k p_k(\theta, \xi_b) u(\theta, \xi_b) = f(\theta) \quad (4.7)$$

De donde, la i -ésima derivada respecto a la colección de variables difusas θ , aplicando el método directo descrito en [20], corresponde a:

$$K_0 \frac{\partial u(\theta, \xi_b)}{\partial \theta_i} + \sum_{k=1}^{n_K} K_k \frac{\partial p_k(\theta, \xi_b)}{\partial \theta_i} u(\theta, \xi_b) + \frac{\partial u(\theta, \xi_b)}{\partial \theta_i} \sum_{k=1}^{n_K} K_k p_k(\theta, \xi_b) = \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta_i} \quad (4.8)$$

Agrupando los términos semejantes,

$$\frac{\partial u(\theta, \xi_b)}{\partial \theta_i} \left(K_0 + \sum_{k=1}^{n_K} K_k p_k(\theta, \xi_b) \right) + \sum_{k=1}^{n_K} K_k \frac{\partial p_k(\theta, \xi_b)}{\partial \theta_i} u(\theta, \xi_b) = \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta_i} \quad (4.9)$$

Reemplazando el término de la izquierda con la relación de la ecuación 3.10 para la matriz de rigidez:

$$\frac{\partial u(\theta, \xi_b)}{\partial \theta_i} K(\theta, \xi_b) = \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta_i} - \sum_{k=1}^{n_K} K_k \frac{\partial p_k(\theta, \xi_b)}{\partial \theta_i} u(\theta, \xi_b) \quad (4.10)$$

Finalmente, despejando la derivada parcial del desplazamiento se tiene que:

$$\frac{\partial u(\theta, \xi_b)}{\partial \theta_i} = K^{-1}(\theta, \xi_b) \left(\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta_i} - \sum_{k=1}^{n_K} K_k \frac{\partial p_k(\theta, \xi_b)}{\partial \theta_i} u(\theta, \xi_b) \right) \quad (4.11)$$

Realizando el mismo procedimiento para obtener la i -ésima derivada parcial del desplazamiento respecto a la información en los puntos de control ξ_b , se obtiene:

$$K_0 \frac{\partial u(\theta, \xi_b)}{\partial \xi_{b,i}} + \sum_{k=1}^{n_K} K_k \frac{\partial p_k(\theta, \xi_b)}{\partial \xi_{b,i}} u(\theta, \xi_b) + \frac{\partial u(\theta, \xi_b)}{\partial \xi_{b,i}} \sum_{k=1}^{n_K} K_k p_k(\theta, \xi_b) = 0 \quad (4.12)$$

Note que ahora la derivada parcial del vector de fuerzas respecto a $\xi_{b,i}$ es igual a 0, pues no depende del campo difuso. Esto en concordancia con el supuesto introducido en la sección 3.4.

Despejando el término de interés y reemplazando por la expresión de $K(\theta, \xi_b)$, se tiene que:

$$\frac{\partial u(\theta, \xi_b)}{\partial \xi_{b,i}} \left(K_0 + \sum_{k=1}^{n_K} K_k p_k(\theta, \xi_b) \right) = - \sum_{k=1}^{n_K} K_k \frac{\partial p_k(\theta, \xi_b)}{\partial \xi_{b,i}} u(\theta, \xi_b) \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial u(\theta, \xi_b)}{\partial \xi_{b,i}} = -K^{-1}(\theta, \xi_b) \sum_{k=1}^{n_K} K_k \frac{\partial p_k(\theta, \xi_b)}{\partial \xi_{b,i}} u(\theta, \xi_b) \quad (4.14)$$

Por tanto, las derivadas parciales del vector de desplazamientos están dadas por las ecuaciones 4.11 y 4.14.

Así, la base reducida Φ se define por:

$$\Phi = \text{orth} \left(\left[u(\theta^0, \xi_b^0), \frac{\partial u(\theta^0, \xi_b^0)}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial u(\theta^0, \xi_b^0)}{\partial \theta_{n_\theta}}, \frac{\partial u(\theta^0, \xi_b^0)}{\partial \xi_{b,1}}, \dots, \frac{\partial u(\theta^0, \xi_b^0)}{\partial \xi_{b,n_b}} \right] \right) \quad (4.15)$$

Donde $\text{orth}(X)$ denota la ortogonalización sobre el espacio de columna de X y el punto de expansión (θ^0, ξ_b^0) se considera como un vector compuesto por los valores de los parámetros inciertos asociados a una pertenencia igual a 1.

En el contexto de este estudio, la ortogonalización se realiza mediante una *descomposición de valores singulares*. Esta técnica en conjunto con otros métodos como el análisis de componentes principales, correlación canónica y sus variantes que consideran además métodos de Kernel, permiten disminuir la dimensión de un sistema por medio de la selección de un apropiado número de vectores. La importancia de esta clase de algoritmos radica en que el problema de los vectores propios proporciona una forma eficiente de representar el sistema sin perder información valiosa. Asimismo, otorga la ventaja de resolver o aproximar en forma competente el sistema, utilizando una serie de técnicas ampliamente conocidas del álgebra computacional [35]. Los resultados numéricos informados en [33, 12] indican que el procedimiento para calcular la base como se presenta en la ecuación 4.15, conduce a aproximaciones precisas de la respuesta del sistema.

4.2.3. Estimación del error

La formulación presentada recientemente permite predecir de forma aproximada la respuesta del sistema, bajo la acción de parámetros inciertos, con un costo numérico mucho menor que el requerido por el sistema original. Esta ganancia es debido a que la dimensión del modelo de orden reducido es mucho menor que la del sistema inicial, es decir $n_r \ll n_d$. No obstante, la aplicación del modelo de orden reducido permite únicamente obtener la respuesta de forma aproximada. De donde, es necesario monitorear el error asociado a $r^A(\theta, \xi_b)$ para asegurar una correcta aproximación de la respuesta.

El error producido por el modelo de orden reducido corresponde a:

$$e(\theta, \xi_b) = r(\theta, \xi_b) - r^A(\theta, \xi_b) \quad (4.16)$$

Indudablemente, para hallar $e(\theta, \xi_b)$ no es conveniente aplicar la Ecuación 4.16, pues sería necesario conocer el valor de la respuesta exacta $r(\theta, \xi_b)$, la que como se discutió al inicio de este capítulo, tiene un elevado costo numérico. Para abordar esta limitación, en la propuesta desarrollada por [12] (basada en lo expuesto en [36]) se formuló como alternativa de medición del error $e(\theta, \xi_b)$, el cálculo de la norma Euclidiana residual asociada a la ecuación de equilibrio 3.9. Para ello, se evalúa en dicha ecuación la respuesta aproximada $u^A(\theta, \xi_b)$ y se normaliza por la norma del vector de fuerzas externas $f(\theta)$.

Así, la medida de error $\varepsilon(\theta, \xi_b)$ corresponde a:

$$\varepsilon(\theta, \xi_b) = \frac{\|K(\theta, \xi_b)u^A(\theta, \xi_b) - f(\theta)\|}{\|f(\theta)\|} \quad (4.17)$$

En donde $\|\cdot\|$ denota la norma Euclidiana. Si bien el cálculo de $\varepsilon(\theta, \xi_b)$ representa una aproximación del error real cometido por el modelo de orden reducido, los resultados de [36] y [12], indican que ofrece una alternativa sencilla para controlar que el error $e(\theta, \xi_b)$ no crezca en demasía.

4.3. Estimación de la respuesta difusa

A continuación, se detalla el procedimiento para estimar en forma discreta la función de pertenencia de la respuesta, por medio de esquema de optimización de niveles α , expuesto en la sección 2.3. Para ello, se considerará la formulación del sistema mediante un modelo de orden reducido como el presentado en la sección anterior. Asimismo, se explica la importancia del monitoreo del error.

4.3.1. Optimización considerando el modelo de orden reducido

Como se ha discutido a lo largo de este documento, es de interés estimar la función de pertenencia de la respuesta $\mu_{\tilde{r}}(r)$ de un sistema lineal elástico bajo la acción de variables y campos difusos. La estimación de $\mu_{\tilde{r}}(r)$ se puede realizar aplicando un algoritmo de optimización directa como se mostró en la sección 3.5.1, al dar solución a las ecuaciones 3.16 y 3.17 para los distintos niveles discretos de pertenencia n_c considerados. Note que si se modifica la función objetivo en dichas ecuaciones por la expresión deducida para determinar la respuesta aproximada del sistema, el problema se reduce a:

$$r^{IA} = \min_{\theta \in \underline{\theta} \wedge \xi_b \in \underline{\xi}_b} r^A(\theta, \xi_b) = \gamma^T \Phi \beta(\theta, \xi_b) \quad (4.18)$$

$$r^{DA} = \max_{\theta \in \underline{\theta} \wedge \xi_b \in \underline{\xi}_b} r^A(\theta, \xi_b) = \gamma^T \Phi \beta(\theta, \xi_b) \quad (4.19)$$

Donde r^{IA} y r^{DA} son, correspondientemente, los límites inferior y superior aproximados de la función de pertenencia para un nivel α_l específico. Note que $(\cdot)^A$ denota los límites de la respuesta aproximada. En esta propuesta, para determinar la función de pertenencia de la respuesta, es decir, para hallar r^{IA} y r^{DA} , se aplicó el esquema de optimización *Particle Swarm* descrito en [37] considerando las modificaciones sugeridas en [38, 39]. Este algoritmo encuentra el óptimo de un determinado problema mediante la mejora iterativa de la solución candidata. Para ello, considera una colección de individuos llamados *partículas*, que se mueven por *pasos* a través de una región. En el contexto de este estudio, las partículas (también llamadas soluciones) corresponden a los distintos valores que los parámetros inciertos θ y ξ_b pueden asumir, y la región de búsqueda se encuentra delimitada por los límites superior e inferior de cada parámetro incierto, en un determinado nivel de pertenencia. El algoritmo comienza creando *enjambre* de partículas a las que asigna *posiciones* y *velocidades iniciales*. Luego, en cada paso, el algoritmo evalúa la función objetivo de cada partícula, vale decir, evalúa los candidatos a óptimos en la expresión formulada para obtener de la respuesta aproximada, p. ej. la función objetivo de la ecuación 4.18 y 4.19. Tras esta evaluación, el algoritmo decide la nueva *velocidad* de cada partícula. Las partículas se mueven y el algoritmo vuelve a evaluar otro candidato hasta hallar los valores óptimos de los parámetros inciertos que minimicen o maximicen la respuesta, según corresponda.

La explicación anterior se esquematiza en la Figura 4.1, en donde por simplicidad se muestra el caso en que se consideran únicamente 2 parámetros inciertos θ_1 y θ_2 , caracterizados por medio de variables difusas. Note que la región celeste corresponde al espacio de búsqueda, el que está delimitado por los límites superior e inferior de cada parámetro incierto, para un nivel de pertenencia específico α_l . Considere que el algoritmo de optimización ya ha comenzado la búsqueda, es decir, que se han asignado las posiciones y velocidades iniciales de todas las partículas del enjambre. La Figura 4.1 ilustra el proceso detrás de la elección de la nueva posición de una partícula específica al aplicar el algoritmo de optimización Particle Swarm. La primera parte de la figura muestra la *solución actual* hallada en una iteración del esquema de optimización. Esta solución es representada por la partícula en color gris. En esta etapa del algoritmo, la partícula tiene asignada su *velocidad actual* que se representa por la flecha segmentada del mismo color.

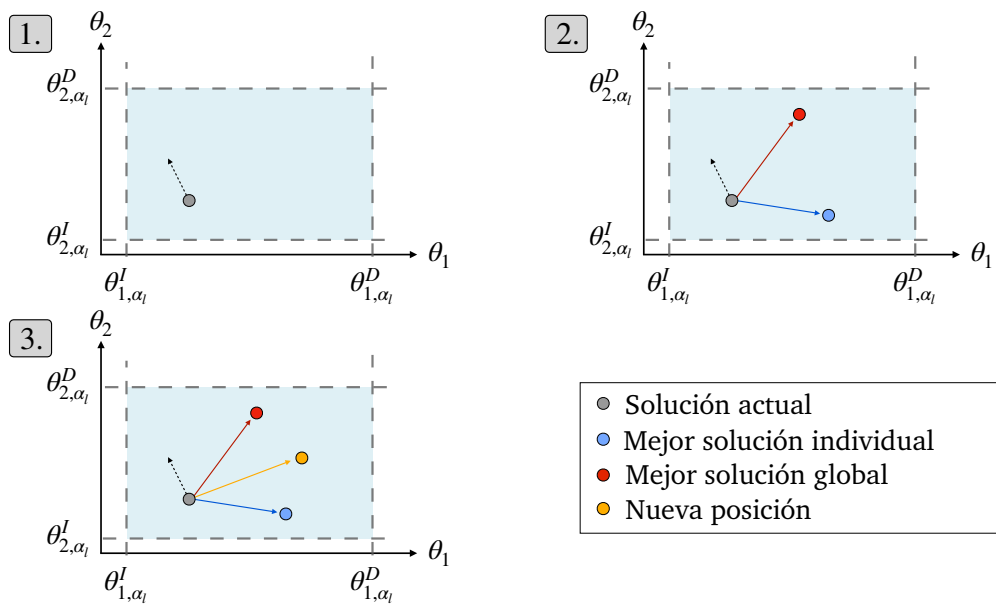


FIGURA 4.1: Metodología general del algoritmo de optimización Particle Swarm. (1) Posición actual. (2) Búsqueda de la nueva posición. (3) Selección de la nueva posición.

La Figura 4.1.2 representa el siguiente paso del algoritmo, donde el esquema de optimización evalúa la función objetivo en la ubicación de la partícula gris, y de esta forma, determina una nueva posición candidata. Esta corresponde a la *mejor solución individual* y es representada por la partícula azul. La flecha del mismo color señala la nueva tendencia de movimiento de la partícula gris, vale decir, la *nueva velocidad*. Sin embargo, en paralelo al proceso de búsqueda de la partícula gris, las demás partículas consideradas por el algoritmo (denominadas *vecinos*) también realizaron su búsqueda. Lo anterior implica que cada una de las partículas del enjambre ha encontrado una nueva ubicación candidata a ser su mejor solución individual. Dentro de todos estos candidatos, el algoritmo identifica a la *mejor solución global*, es decir, a la ubicación que tiene un mejor desempeño en términos de la función objetivo. Esta partícula es representada en color rojo en la Figura 4.1.2. La velocidad asociada a esta solución es ilustrada por la flecha del mismo color. Por ende, además de la influencia de la partícula azul, el algoritmo considera la influencia de la mejor solución global para determinar la nueva ubicación de la partícula gris. Esta ubicación se ilustra en

Por tanto, para hallar r^{IA} y r^{DA} , vale decir, para resolver las ecuaciones 4.18 y 4.19, se requiere de la evaluación de la función objetivo en reiteradas ocasiones. Esto se debe a que los algoritmos de optimización, y en particular el esquema Particle Swarm, evalúan distintos candidatos hasta encontrar el óptimo, como se discutió recientemente. Asimismo, se debe tener en consideración que para estimar la función de pertenencia de la respuesta, es necesario aplicar el esquema de optimización descrito 2 veces para cada corte de la función de pertenencia de la respuesta, ya que es necesario identificar los límites superior e inferior de la respuesta. Este proceso es ilustrado en la Figura 4.2.a para el caso en que $n_c = 2$. Para obtener de forma aproximada $\mu_{\tilde{r}}(r)$, la primera tarea a realizar corresponde al *paso inicial*. Este denota la etapa en la que se realiza un análisis exacto del sistema (es decir, mediante la ecuación 3.9) que considera como conjunto de parámetros inciertos el correspondiente al punto de expansión (θ^0, ζ_b^0) . Con esto, es posible construir la base Φ del modelo de orden reducido, como se expuso en la sección 4.2.2. Una vez completado este paso, se lleva a cabo la optimización para los niveles de pertenencia α_1 y α_2 , en el *paso 1* y el *paso 2*, respectivamente. Se debe notar que como α_1 es cercano a 1, se espera que la respuesta aproximada se acerque bastante a la exacta. Esto se debe a que posiblemente todos los valores explorados durante la fase de optimización estén relativamente cerca del punto de expansión. Esto se ilustra en la Figura 4.2.c donde se muestra el espacio de búsqueda para hallar los límites del nivel α_1 en celeste.

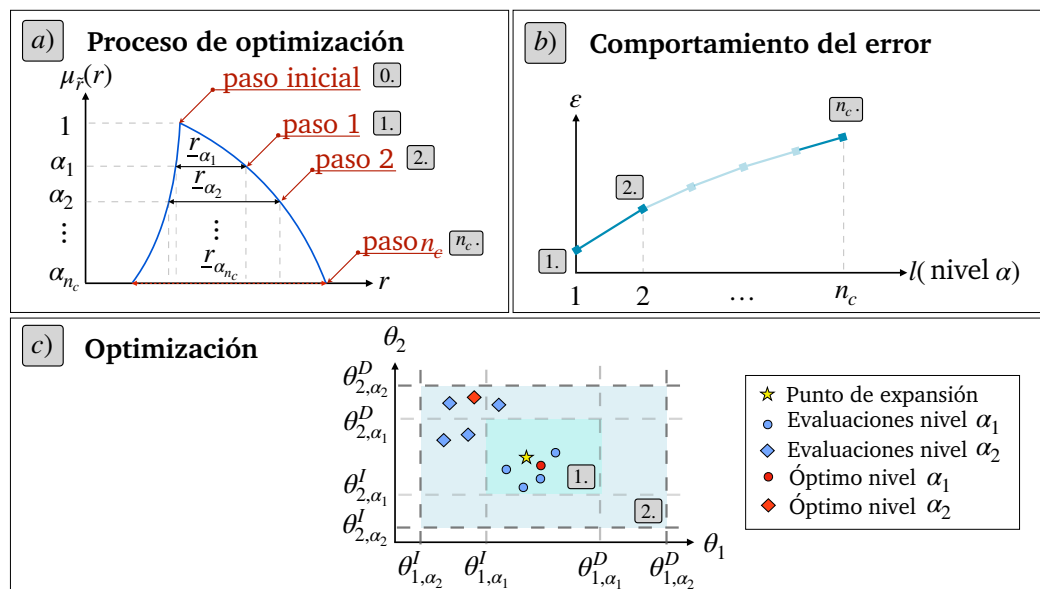


FIGURA 4.2: Esquema del procedimiento de optimización. (a) Descripción gráfica de la construcción de la función de pertenencia de la respuesta. (b) Comportamiento del error. (c) Búsqueda del óptimo con el algoritmo de optimización para los niveles α_1 y α_2 .

Observe que el punto de expansión, que se representa con una estrella, es cercano a todas las evaluaciones realizadas por el algoritmo (dibujadas con círculos azules en la figura) y al óptimo encontrado (representado por un círculo rojo). En contraste, para el *paso 2*, cuya región de búsqueda es más grande, se espera que la calidad de la aproximación disminuya, ya que dicho espacio de búsqueda puede contener valores alejados de (θ^0, ξ_b^0) [12]. Por ende, tanto las evaluaciones realizadas por el algoritmo de búsqueda (denotadas por rombos azules), como el óptimo hallado (rombo rojo) pueden estar alejados del punto de expansión.

Note además, que este fenómeno produce un considerable aumento del error a medida que encuentran los óptimos para niveles de pertenencia cercanos a 0. Esto se representa en la Figura 4.2.b, donde para cada óptimo, vale decir, los límites superior e inferior de un determinado corte de la función de pertenencia de la respuesta; se calcula error ε según la ecuación 4.17. Es decir, se determina error cometido por cada conjunto de parámetros óptimo (θ, ξ_b) encontrado durante la fase optimización del modelo para estimar r^{IA} y r^{DA} en los niveles $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_c}$. El máximo valor de error obtenido para un nivel es graficado en celeste en la Figura 4.2.b, donde cada corte es representado por los números en cuadros grises. Se observa cómo el máximo error producido en el paso 2 es mayor que el obtenido en el paso anterior, y cómo se espera que en el resto de los cortes realizados a la función de pertenencia el error continúe creciendo.

4.3.2. Optimización con enriquecimiento de la base

El esquema metodológico anterior no otorga control sobre el crecimiento del error ε . Esto se debe a que el modelo de orden reducido, tal como está formulado, no se retroalimenta del error que comete. Es decir, la base del modelo reducido es estática respecto a ε . Esto no es deseable pues es posible que se obtengan errores demasiado grandes que reflejen que la aproximación esté siendo inexacta. Por ende, existe un problema asociado a la acumulación del error a medida que se exploran distintos niveles α_j . Para evitar que la calidad de la aproximación disminuya considerablemente a medida que se analizan niveles de pertenencia más cercanos a 0, se aplicó una estrategia basada en la propuesta por Valdebenito et al. en 2021 [12], que fue modificada de lo expuesto por Gogu et al. en 2016 [36]. Esta situación se esquematiza en la Figura 4.3. Note que el esquema de la Figura 4.3.a es similar a lo ya explicado en la Figura 4.2 y que en la Figura 4.3.b, se muestra la evolución del error ε en cada uno de los niveles de pertenencia analizados, considerando la estrategia aplicada. En una primera instancia, se define un error umbral o *tolerancia* ε_t , que corresponde al máximo error $\varepsilon(\theta, \xi_b)$ que se acepta que exista entre el modelo exacto y aproximado. Este umbral es representado por la línea segmentada naranja de la Figura 4.3.b. Luego, para los límites hallados en cada nivel de pertenencia, se calcula el error ε según la ecuación 4.17, como se explicó en la sección anterior. El máximo valor de error obtenido para los óptimos de un nivel es graficado en celeste en la Figura 4.3.b, donde cada corte es representado por los números en cuadros grises. Note que para el caso del nivel α_1 , el máximo error obtenido entre ambos límites, r^{IA} y r^{DA} , se encuentra bajo el umbral. Sin embargo, para el caso del nivel α_2 , uno de los conjuntos de parámetros óptimos (θ^*, ξ_b^*) (obtenidos para hallar r^{IA} o r^{DA}) comete un error que sobrepasa el umbral considerado. Cuando esto sucede, se toman las siguientes 3 acciones:

- Se realiza un *análisis exacto*. Esto significa que se resuelve la ecuación 3.9 para obtener $u(\theta^*, \xi_b^*)$, lo que permite obtener $r(\theta^*, \xi_b^*)$.
- Se realiza la *actualización* de la base reducida Φ , enriqueciéndola con la información otorgada por $u(\theta^*, \xi_b^*)$.
- Se recalculan los límites del nivel de pertenencia que sobrepasó la tolerancia.

Este último punto se ilustra en la Figura 4.3.c, donde Φ_0 representa la base reducida obtenida en el paso inicial. Note que Φ_0 fue aplicada para determinar los límites de la función de pertenencia de la respuesta para el nivel α_1 , y para el nivel α_2 antes de la actualización de la base. En la figura, la columna de la base reducida que representa al vector de desplazamientos es dibujada en verde, mientras que las componentes asociadas a las derivadas parciales respecto a las variables difusas y puntos de control se presentan en morado y rosado, respectivamente. Tras encontrar que uno de los límites asociados al nivel α_2 supera la tolerancia, se realiza el análisis adicional exacto. Con ello, se obtiene una nueva base reducida Φ_1 , que contiene una columna adicional representada en naranja (ver Figura 4.3.c). La respuesta asociada al análisis exacto $u(\theta^*, \xi_b^*)$, se incluye en la base reducida Φ_1 como un vector columna mediante el proceso de Gram-Schmidt, que permite ortonormalizar un conjunto de vectores en un espacio de producto Euclidiano interno que favorece la estabilidad numérica del modelo de orden reducido [40]. Es decir, la base reducida Φ_1 viene dada por:

$$\Phi_1 = \left[\Phi_0, \frac{v(\theta^*, \xi_b^*)}{\|v(\theta^*, \xi_b^*)\|} \right] \quad (4.20)$$

Donde $v(\theta^*, \xi_b^*)$ corresponde a:

$$v(\theta^*, \xi_b^*) = u(\theta^*, \xi_b^*) - \Phi_0 \left(\Phi_0^T u(\theta^*, \xi_b^*) \right) \quad (4.21)$$

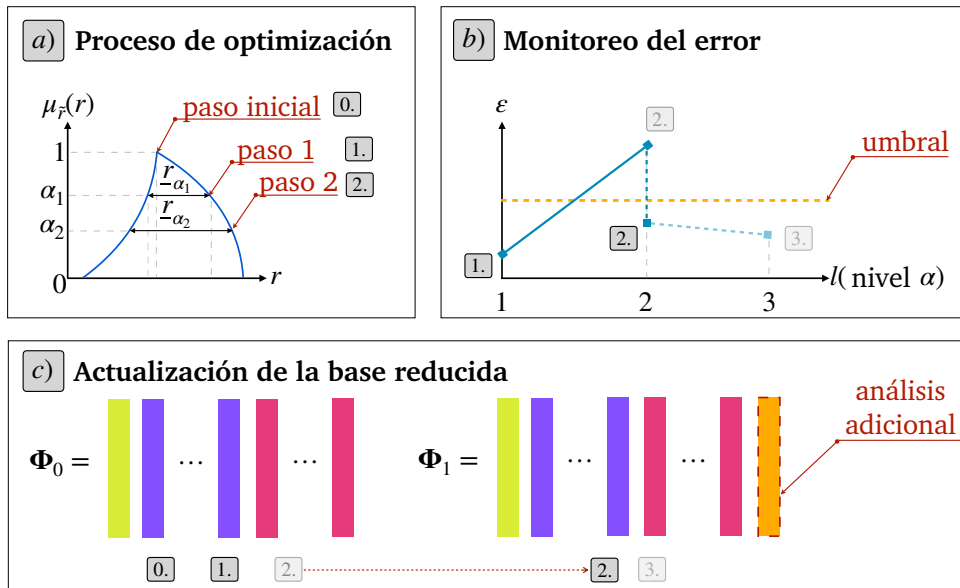


FIGURA 4.3: Esquema del procedimiento de enriquecimiento de la base reducida. (a) Descripción gráfica del proceso de optimización. (b) Esquema del monitoreo del error. (c) Actualización de la base reducida.

Así, cuando se encuentre los nuevos óptimos del nivel α_2 en la fase de optimización, será posible mantener el error por debajo de la tolerancia, como es ejemplificado en la Figura 4.3.b. Tenga en cuenta que la descripción anterior considera que para un nivel específico, sólo uno de los límites supera la tolerancia. No obstante, podría darse el caso en que ambos límites de dicho nivel superen el umbral considerado. En este caso, el proceso de actualización se realiza nuevamente, pero enriqueciendo la base con la información del límite restante.

Por tanto, existen 2 escenarios posibles para hallar los límites de la función de pertenencia en este intervalo: 1) que no sea necesario volver a enriquecer la base, o 2) que se requiera de una actualización adicional. En el primer caso, la búsqueda del óptimo continúa hasta ser exitosa, vale decir, se encuentran r^{IA} y r^{DA} sin necesidad de actualizar la base nuevamente, y luego se procede a analizar el siguiente nivel (p. ej. un tercer nivel α , como se muestra en la Figura 4.3.b). En el segundo caso, se realiza la nueva actualización y se determinan ambos límites. Tenga en cuenta además, que para este nivel posterior (α_3) podrían ocurrir ambas situaciones descritas, siendo representada en la figura el primer escenario. De esta forma, esta técnica asegura que siempre se mantendrá el error producido por el modelo de orden reducido bajo la tolerancia. El valor máximo admisible del error considerado en este estudio es de $\varepsilon_t = 10^{-4}$, según las recomendaciones expuestas en [36].

4.4. Conclusiones del Capítulo 4

En el capítulo 4 se formuló el modelo de orden reducido considerando la caracterización de los parámetros de entrada por medio de campos difusos. Así, se describió cómo, por medio de un análisis de sensibilidad de la respuesta, es posible construir la base reducida que permite proyectar las ecuaciones de equilibrio del sistema original en un base de menor dimensión. Del mismo modo, se abordó el procedimiento que permite estimar la función de pertenencia de la respuesta, mediante optimización. En dicho caso, se presentó la necesidad de monitorear el error para asegurar la calidad de la aproximación obtenida, y se explicó cómo proceder cuando el error sobrepasa una determinada tolerancia. En el capítulo 5, se muestran dos ejemplos de aplicación sencillos de esta metodología, (1) un sistema estructural lineal elástico bajo cargas estáticas, y (2) un problema de flujo en un medio poroso en estado estacionario.

Capítulo 5

EJEMPLOS

5.1. Pilote sobre fundación elástica

5.1.1. Descripción del sistema estructural

El ejemplo que se expone a continuación está basado en lo presentado en [9, 41] y consiste en un pilote que soporta una carga lateral P como se muestra en la Figura 5.1a. El efecto restrictivo del suelo sobre el pilote es considerado como una fundación elástica tipo Winkler (ver Figura 5.1b). El pilote tiene una longitud $L = 10$ [m], y se asume que tanto el módulo de elasticidad E , la inercia I de la sección y la carga P son inciertos. Estos se caracterizan mediante las variables difusas $\tilde{E}$, $\tilde{I}$ y $\tilde{P}$, respectivamente; cuyas funciones de pertenencia corresponden a las presentadas en la Figura 5.2. La propiedad C_w , correspondiente al coeficiente de Winkler y equivalente al módulo de balasto del suelo, se considera incierta y es caracterizada mediante el campo difuso $\tilde{C}_w$ (ver Figura 5.3), por lo que admite dependencia espacial como se discutió en la sección 3.4.

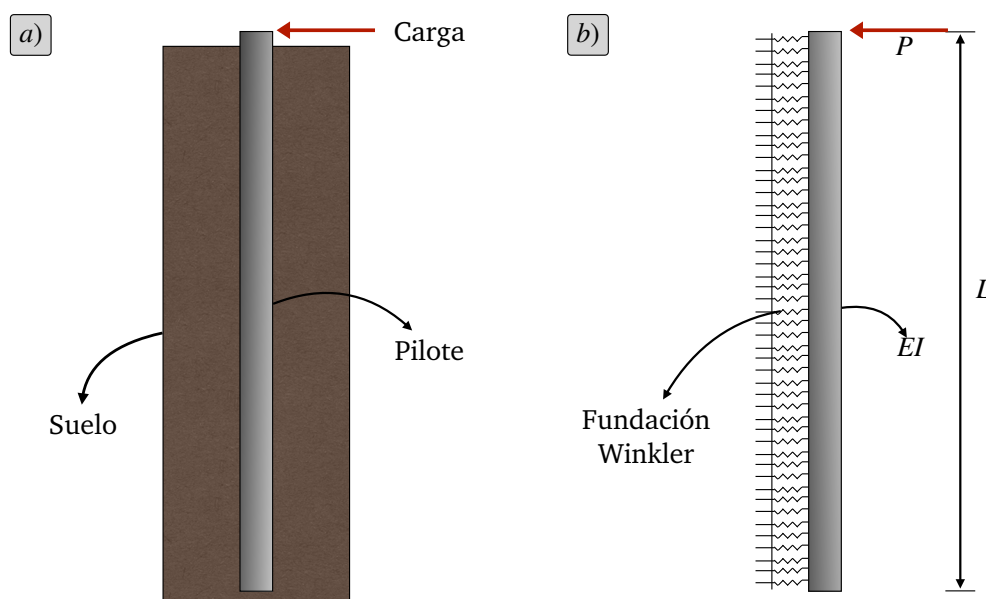


FIGURA 5.1: Esquema del problema de aplicación. (a) Descripción general.(b) Modelo estructural.

Considere que el problema es unidimensional y que es posible caracterizar el balasto en 10 ubicaciones dentro del dominio, por medio de su representación con funciones de pertenencia. Dichas funciones son esquematizadas en la Figura 5.3. El dominio se asume igual a la longitud del pilote, es decir, $\Omega = [0, 10]$. Se considera una malla de 500 elementos finitos, donde cada elemento es unidimensional y está constituido por un nodo inicial y final apoyados sobre resortes equivalentes que representan el balasto de la fundación Winkler. Cada elemento posee 4 grados de libertad que se disponen como se ilustra en la Figura 5.4. Además, cada uno de los elementos finitos se representó mediante su centroide. Asimismo, cabe destacar que se consideraron 10 niveles α para estimar la función de pertenencia de la respuesta, es decir, $n_c = 10$.

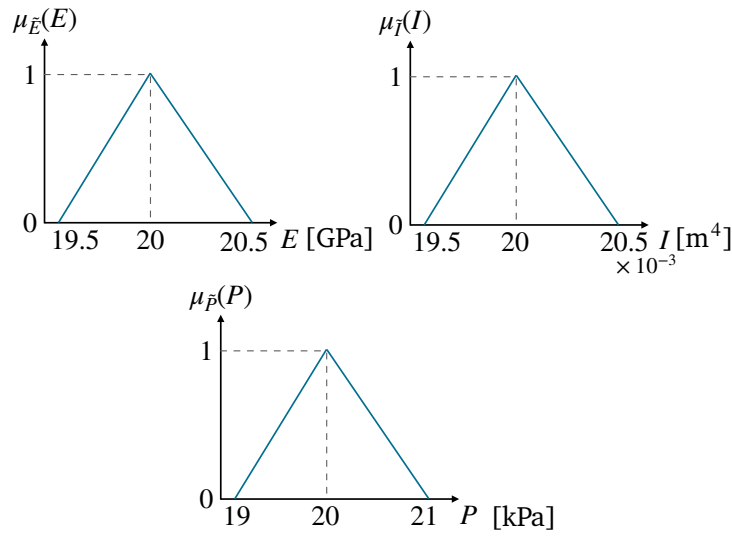


FIGURA 5.2: Funciones de pertenencia asociadas a las variables difusas consideradas: módulo de elasticidad, inercia y carga.

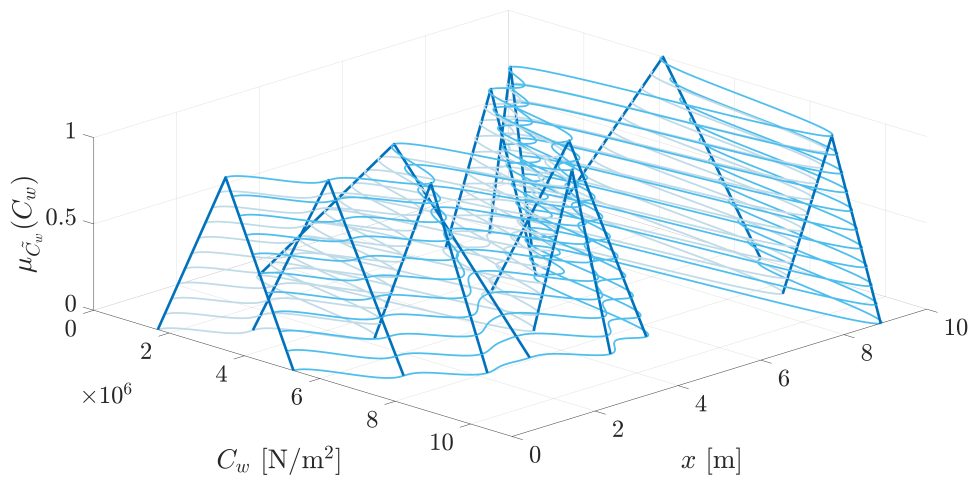


FIGURA 5.3: Campo difuso asociado al balasto.

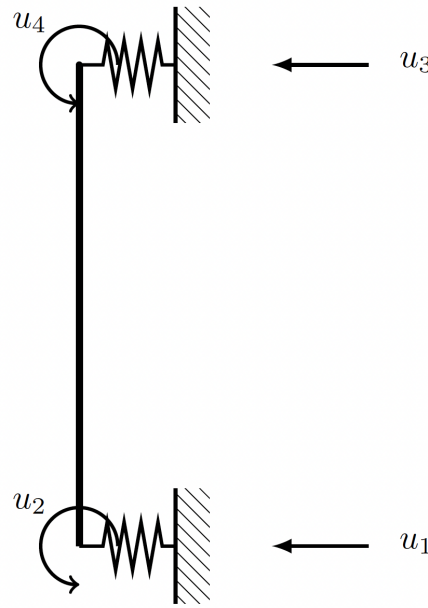


FIGURA 5.4: Grados de libertad asociados a un elemento finito del modelo. u_1 y u_3 corresponden al desplazamiento horizontal del elemento; u_2 y u_4 corresponden al giro.

Como se expuso anteriormente, se modeló el pilote como una viga elástica que descansa sobre una fundación Winkler. La matriz de rigidez de cada elemento fue calculada utilizando integración exacta, considerando como funciones de forma los polinomios de Hermite, según lo estipulado en [42]. De donde, se consideró que la matriz de rigidez de los elementos finitos considerados es igual a la suma de la matriz de rigidez asociada a las propiedades del pilote K_{EI} , y la matriz de rigidez asociada al balasto del suelo K_{C_w} . Es de interés obtener la función de pertenencia que capture la incertidumbre existente en el desplazamiento en el extremo superior del pilote $\tilde{r}$. Para ello, se consideraron 10 niveles de pertenencia como se mencionó anteriormente, para los que se realizó análisis de intervalo mediante un algoritmo de optimización, según lo expuesto en la sección 2.4.2. En particular, para encontrar $r_{\alpha_l}^I$ y $r_{\alpha_l}^D$ para los intervalos asociados a cada discretización α_l de la función de pertenencia, se aplicó el esquema de optimización *Particle Swarm* descrito en [37] y considerando las modificaciones sugeridas en [38, 39], para el modelo exacto y reducido que se expuso en el capítulo anterior. Así, se estudió el sistema considerando 2 modelos: el modelo *exacto*, que consideró la función de pertenencia de la respuesta exacta y el modelo aproximado R1, el que se evaluó con y sin enriquecimiento de la base reducida.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos en términos de la tolerancia al error considerada.

5.1.2. Solución considerando $\varepsilon_t \rightarrow \infty$

La función de pertenencia obtenida para la respuesta en términos del desplazamiento en el extremo del pilote corresponde a la mostrada en la Figura 5.5, donde se denota este desplazamiento como r . Se consideró el umbral para el error como $\varepsilon_t \rightarrow \infty$, vale decir, se estudió la aplicación de la estrategia cuando no se considera el enriquecimiento de la base reducida Φ . Los resultados muestran que la función de

pertenencia de la respuesta aproximada R1 y el modelo exacto, son prácticamente idénticas. Por la forma de la función de pertenencia, se observó una relación no lineal entre los parámetros de entrada y la respuesta del sistema. Respecto a los tiempos de cómputo, se obtuvo un *speed up* cercano a 75 del modelo aproximado respecto a la resolución del modelo exacto.

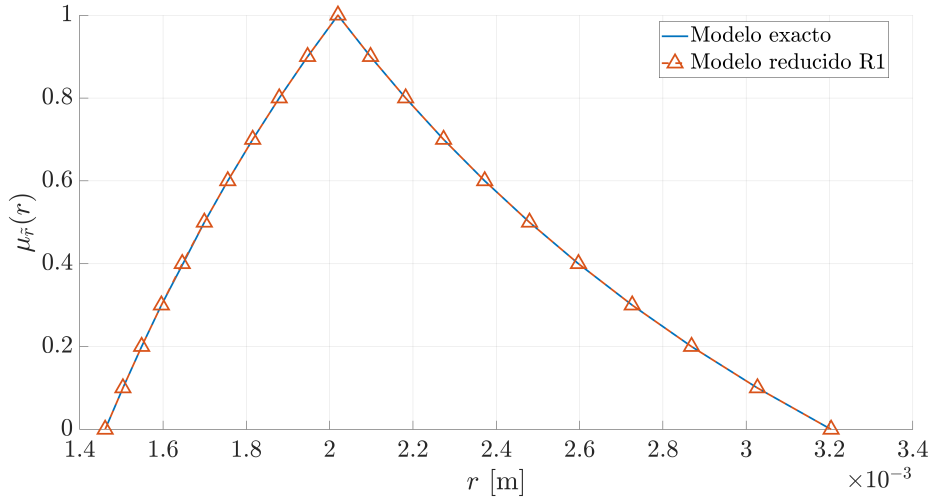


FIGURA 5.5: Función de pertenencia de la respuesta de desplazamiento en el extremo superior del pilote, considerando $\varepsilon_t \rightarrow \infty$.

La Figura 5.6 por su parte, muestra el comportamiento del máximo error ε en cada corte α_l de la función de pertenencia. Se observa cómo el error crece en función del nivel de pertenencia analizado, siendo mayor para el caso de los niveles más cercanos a 0. Este fenómeno era esperado según lo discutido en la sección 4.3.1 y mostrado en la Figura 4.2.c, pues para niveles de pertenencia cercanos a 0, es esperable que la solución óptima se encuentra más lejos del punto de expansión.

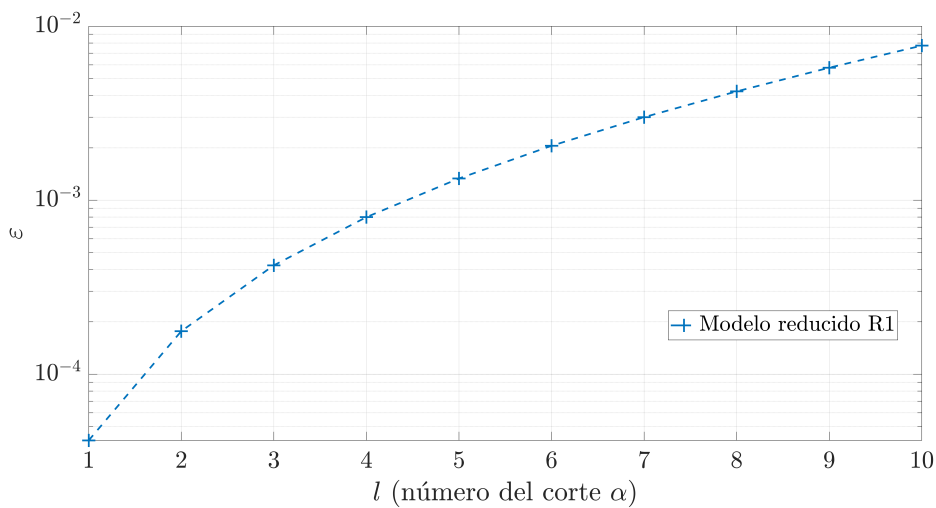


FIGURA 5.6: Comportamiento del error considerando $\varepsilon_t \rightarrow \infty$.

5.1.3. Solución considerando $\varepsilon_t = 10^{-4}$

La función de pertenencia obtenida para la respuesta en términos del desplazamiento considerando $\varepsilon_t = 10^{-4}$, corresponde a la mostrada en la Figura 5.7, donde se analizó la aplicación de la estrategia cuando se considera el enriquecimiento de la base reducida Φ . Los resultados muestran que la función de pertenencia de la respuesta aproximada R1 y el modelo exacto, son prácticamente idénticas, tal como se obtuvo en el caso en que no se controló error. Asimismo, nuevamente se observó una relación no lineal entre los parámetros de entrada y la respuesta del sistema. Respecto a los tiempos de cómputo, se obtuvo un *speed up* de 45.

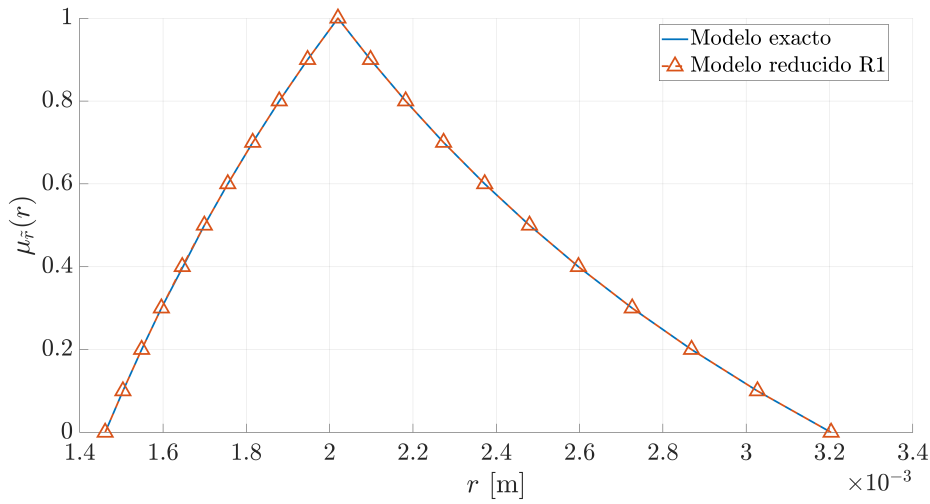
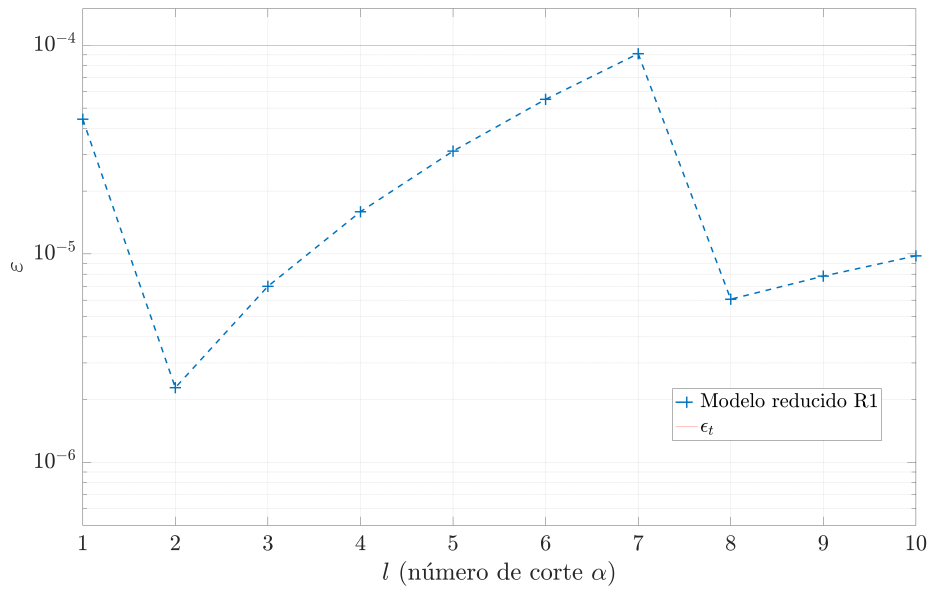
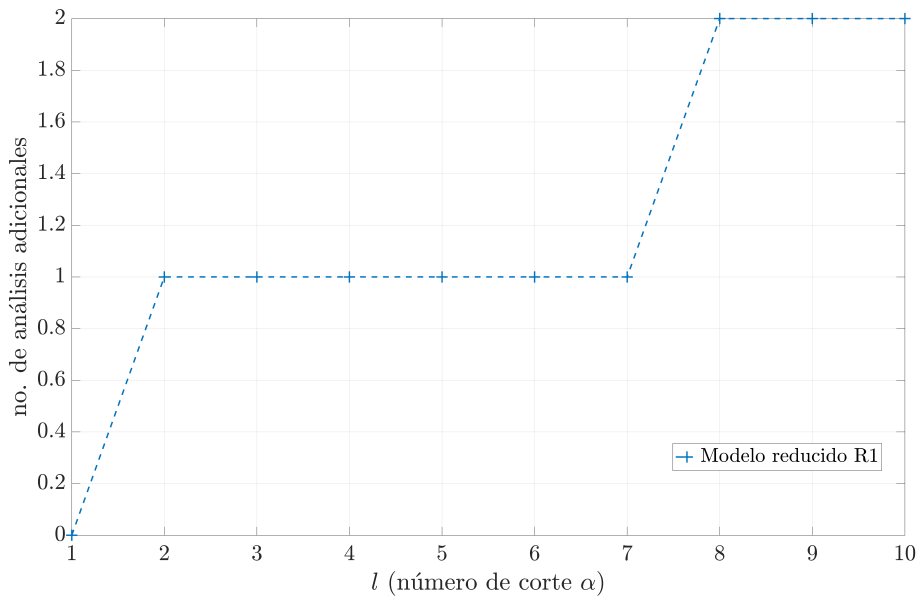


FIGURA 5.7: Función de pertenencia de la respuesta de desplazamiento en el extremo superior del pilote, considerando $\varepsilon_t = 10^{-4}$.

Respecto al comportamiento del error, la Figura 5.8 muestra cómo el error se mantiene por debajo del umbral considerado para todos los niveles de pertenencia analizados. Para entender mejor este comportamiento, observe que la Figura 5.9 presenta el número de análisis adicionales realizados en cada nivel α_l . Note que para el nivel α_1 no fue necesario enriquecer la base reducida, sin embargo, para el caso del nivel α_2 se requirió actualizar la base una vez. Se obtuvo que, en total, se actualizó 2 veces la base reducida, y tal como se visualiza en la Figura 5.9, el siguiente análisis adicional fue requerido para hallar los límites del nivel α_8 .

Asimismo, se observó que lo anterior produjo un comportamiento decreciente del error hasta el nivel α_2 , donde ocurrió el primer enriquecimiento de la base. Este fenómeno era esperado según lo discutido en la sección 4.3.1 y mostrado en la Figura 4.3.c, pues medida que se realiza la actualización de la base, disminuye el error producido por el modelo para hallar los límites del corte en evaluación. Como se presenta en la Figura 5.9, para los niveles posteriores a $l = 3$, se obtuvo un comportamiento notoriamente creciente del error, sin embargo, no fue necesario actualizar la base hasta el nivel α_8 (ver Figura 5.9). Tras esta actualización, el error decayó de nuevo, para luego mantenerse levemente al alza para los demás cortes analizados de la función de pertenencia de la respuesta.

FIGURA 5.8: Comportamiento del error considerando $\epsilon_t = 10^{-4}$.FIGURA 5.9: Análisis adicionales requeridos cuando $\epsilon_t = 10^{-4}$.

5.2. Flujo en medio poroso

5.2.1. Descripción del sistema estructural

El ejemplo estudiado a continuación está basado en el sistema presentado en [9] y corresponde al análisis del flujo a través de un medio poroso en estado estacionario debajo de una presa impermeable. Es importante recalcar que esta clase de problemas se puede modelar usando los principios del análisis estructural estático [4], como se mencionó en la sección 2.3. La presa está fundada sobre una capa de suelo permeable de 20 [m] de profundidad que está confinada por un estrato de roca

impermeable. La presa tiene una extensión de 20 [m] como se muestra en la Figura 5.10. Aguas arriba de la presa, se retiene una columna de agua de altura h que es conocida e igual a 10 [m]. Es de interés conocer el caudal que escurre aguas abajo de la presa, de donde es necesario conocer la permeabilidad vertical k_y y horizontal k_x del medio poroso.

En la práctica, la permeabilidad del suelo puede ser estimada experimentalmente mediante de pruebas de bombeo [43] realizadas comúnmente con un pozo de extracción y dos pozos de observación [44, 45]. En los pozos de observación, es posible medir el descenso del nivel de agua producto del bombeo en el pozo de extracción, el que puede ser a caudal constante o variable [43]. Este procedimiento permite estimar, de forma indirecta, la permeabilidad de las diferentes capas de suelo que se encuentren en la zona de prospección, según la *transmisividad* de los distintos medios identificados. Sin embargo, al ser determinada indirectamente de la información recolectada en terreno, la cuantificación de la permeabilidad del suelo puede verse afectada por la imprecisión y la escasez en las mediciones de campo, la anisotropía del medio y la variación espacial [46]. Lo anterior se debe a que esta propiedad depende de muchos factores, como la proporción de vacíos y mineralogía [47], el tamaño, forma, empaquetamiento y orientación del grano [48]; así como también de la distribución del tamaño de los poros de la masa de suelo y la interconexión de los mismos [49]. Por dichas razones, en esta propuesta se asume que la permeabilidad del medio poroso es incierta y, como pueden existir dependencias espaciales, es modelada como un campo difuso.

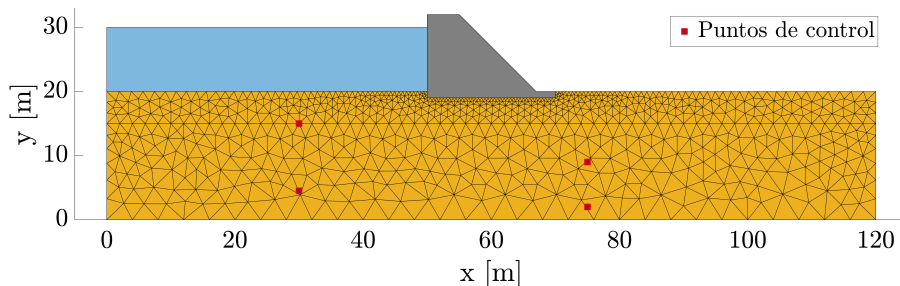


FIGURA 5.10: Malla de elementos finitos utilizada y ubicación de los puntos de control.

Considere que el problema es bidimensional y que es posible caracterizar la permeabilidad en ambas direcciones, en 4 ubicaciones dentro del dominio. Este dominio corresponde a Ω , donde $x \in [0, 120]$, $y \in [0, 20]$. La ubicación de los puntos de control se muestra en la Figura 5.10. Específicamente, se caracterizó (en cada punto de control) la permeabilidad horizontal k_H , mientras que la permeabilidad vertical k_V fue

obtenida en función de k_H con el objetivo de incorporar la anisotropía y dependencia entre ambas permeabilidades. Para ello, se consideró la siguiente relación entre ambas permeabilidades, $0.1k_H \leq k_V \leq k_H$, según la información disponible en la literatura [50]. Se debe notar que como el problema es bidimensional y anisotrópico, no es posible visualizar el campo difuso resultante como en el problema anterior (Figura 5.3). No obstante, la Figura 5.11 muestra las funciones de pertenencia definidas para cada punto de control, las que ahora corresponden a pirámides pues el análisis se realizó en dos dimensiones. La forma de trapecio de la base de las funciones de pertenencia (es decir, cuando $\mu_{\tilde{k}}(k) = 0$) se debe a: (1) la relación considerada entre la permeabilidad vertical k_V y horizontal k_H ; y (2) la anisotropía de la permeabilidad del suelo. En el caso opuesto, si ambas permeabilidades se hubieran considerado independientes, la base tendría una forma rectangular. Del mismo modo, si se hubiera modelado un comportamiento isotrópico de la permeabilidad del suelo (vale decir, $k_V = k_H$), dicha base sería cuadrada.

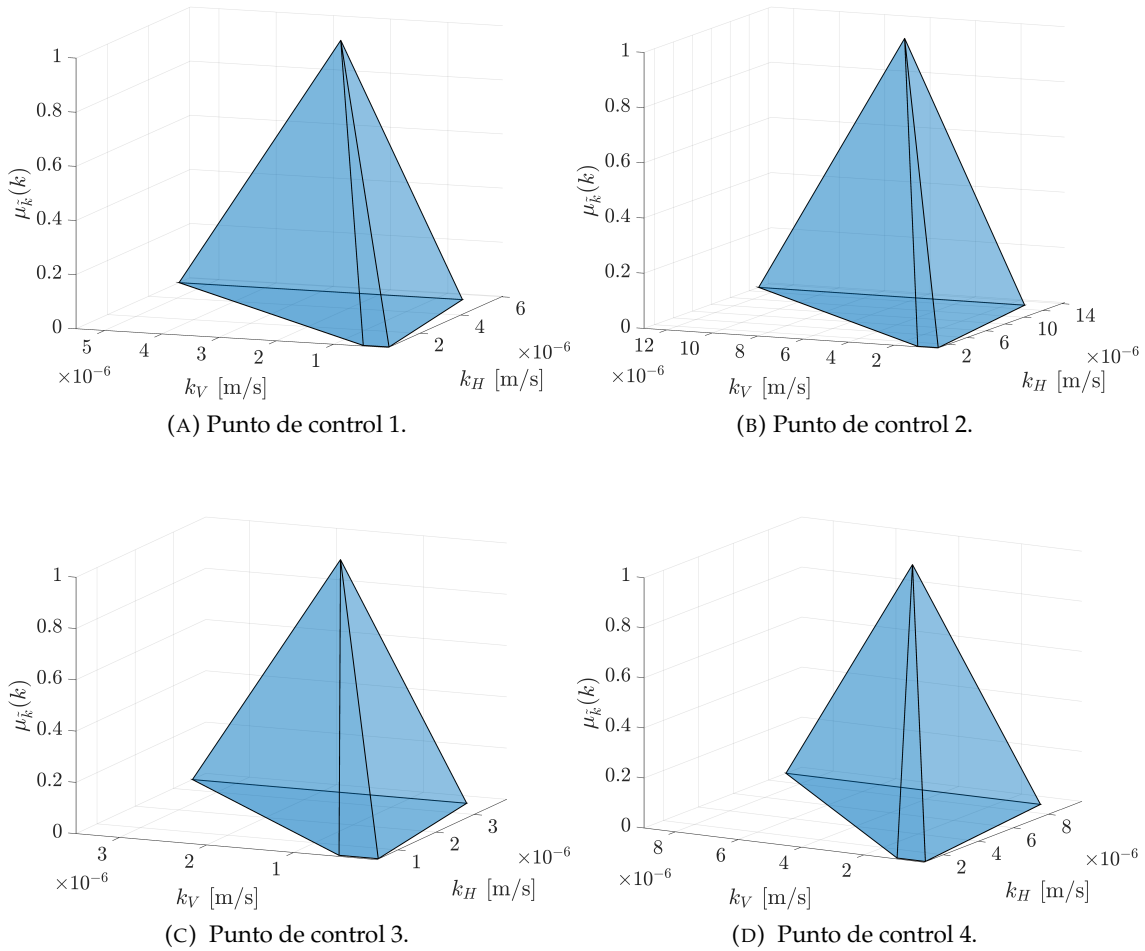


FIGURA 5.11: Funciones de pertenencia asociadas a las permeabilidades en cada punto de control. Cada punto se ubican en: (A) $x = 30$ [m], $y = 4.5$ [m]. (B) $x = 30$ [m], $y = 15$ [m]. (C) $x = 75$ [m], $y = 2$ [m]. (D) $x = 75$ [m], $y = 9$ [m].

Se consideró un modelo simple de elementos finitos, que comprendió 3183 nodos y 1498 elementos triangulares cuadráticos. Cada elemento posee 6 grados de libertad y se representó mediante su centroide. Se utilizaron 10 niveles α para estimar la función de pertenencia de la respuesta, es decir, $n_c = 10$. La matriz de permeabilidad de cada elemento fue calculada utilizando integración numérica, considerando 3 puntos de integración. Note que por la caracterización de los parámetros anteriormente descrita, el caudal también es incierto y, por tanto, el objetivo de estudio será determinar la función de pertenencia que represente la variabilidad existente en el caudal $\tilde{r}$ a la salida de la presa. Para estimar los 10 niveles de pertenencia mencionados anteriormente, se aplicó el esquema de optimización *Particle Swarm*, para el modelo exacto y reducido al igual que en el ejemplo anterior.

De donde, el sistema se estudió considerando dos modelos: el modelo exacto y el modelo aproximado R1. Los resultados se evaluaron considerando que (a) no hay actualización de la base reducida ($\varepsilon_t \rightarrow \infty$), y que (b) hay actualización de la base reducida con un umbral de $\varepsilon_t = 10^{-4}$. A continuación, se presentan los resultados obtenidos en términos de la tolerancia al error considerada.

5.2.2. Solución considerando $\varepsilon_t \rightarrow \infty$

La función de pertenencia obtenida para la respuesta en términos del flujo total a la salida de la presa corresponde a la mostrada en la Figura 5.12, donde se denota este flujo como r . Se consideró el umbral para el error como $\varepsilon_t \rightarrow \infty$, vale decir, se estudió el sistema sin considerar el enriquecimiento de la base reducida Φ . Los resultados muestran que la función de pertenencia de la respuesta aproximada R1 y el modelo exacto, son muy similares. Se observan algunas discrepancias mínimas para valores bajos de la función de pertenencia en el lado izquierdo. Por la forma de la función de pertenencia, se observó una relación técnicamente lineal entre los parámetros de entrada y la respuesta del sistema. Respecto a los tiempos de cómputo, se obtuvo un *speed up* cercano a 46 del modelo aproximado respecto a la resolución del modelo exacto.

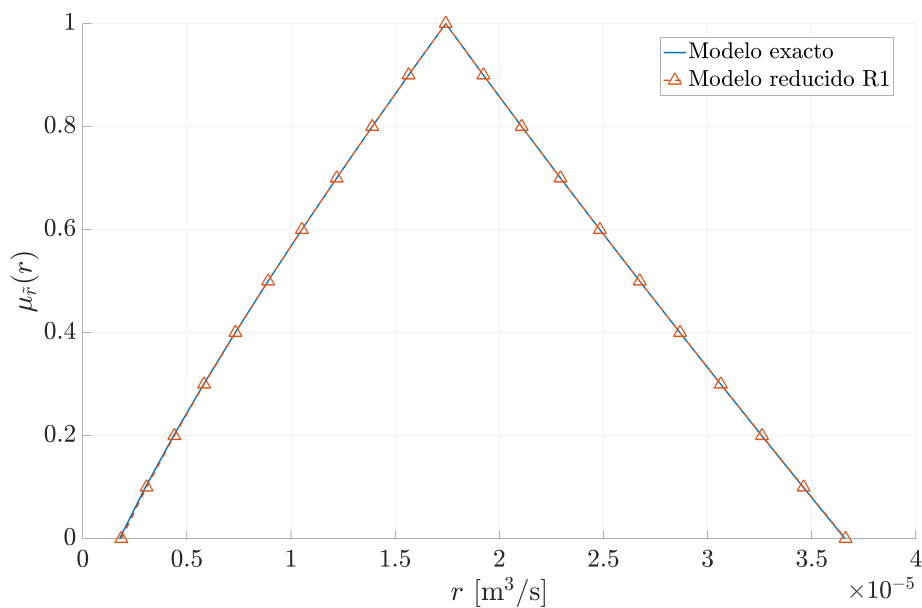
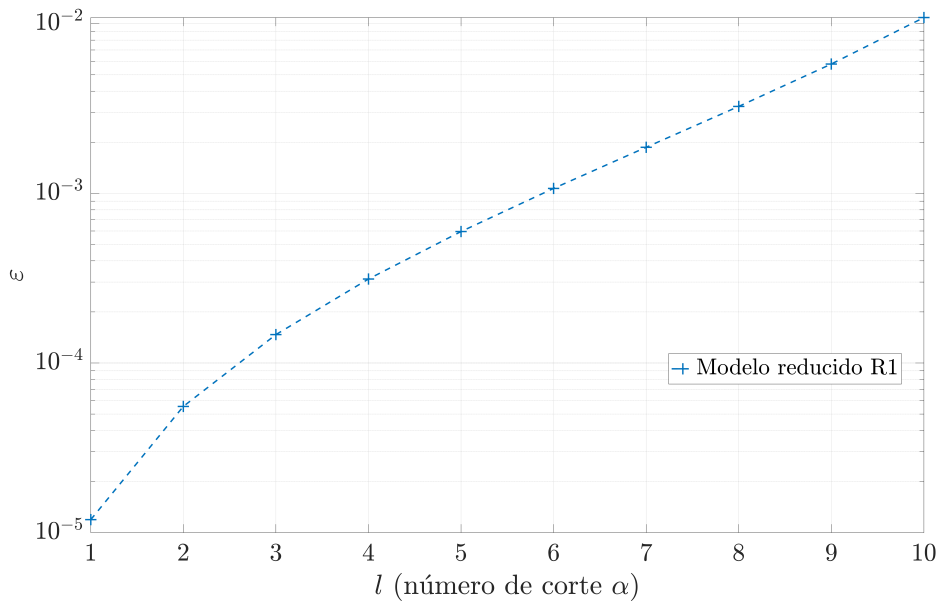


FIGURA 5.12: Función de pertenencia de la respuesta de flujo a la salida de la presa, considerando $\varepsilon_t = \infty$.

FIGURA 5.13: Comportamiento del error considerando $\varepsilon_t = \infty$.

La Figura 5.13 por su parte, muestra el comportamiento del máximo error ε en cada corte α_l de la función de pertenencia asociada al flujo a la salida de la presa. Se observó un comportamiento creciente del error en función del nivel de pertenencia analizado, siendo mayor para el caso de los niveles más cercanos a 0. Tal como se discutió en el ejemplo de la sección 5.1, este fenómeno era esperado pues para niveles de pertenencia cercanos a 0, el espacio de búsqueda es más grande y, por ende, es esperable que la solución óptima se encuentra más lejos del punto de expansión. El comportamiento del error es similar al obtenido en el problema del piloto (ver sección 5.1).

5.2.3. Solución considerando $\varepsilon_t = 10^{-4}$

La función de pertenencia obtenida para la respuesta en términos del flujo total a la salida de la presa considerando $\varepsilon_t = 10^{-4}$, corresponde a la mostrada en la Figura 5.14. Aquí, se analizó la aplicación de la metodología propuesta cuando se considera la actualización de la base reducida Φ . Los resultados muestran que la función de pertenencia de la respuesta aproximada R1 y el modelo exacto, son prácticamente idénticas. Note que las diferencias para valores bajos de la función de pertenencia en el lado izquierdo, obtenidas en el caso anterior, no se obtienen cuando el procedimiento considera la estrategia de actualización de la base. Nuevamente, por la forma de la función de pertenencia, se observó una relación técnicamente lineal entre los parámetros de entrada y la respuesta del sistema. Respecto a los tiempos de cómputo, se obtuvo un *speed up* de 35.

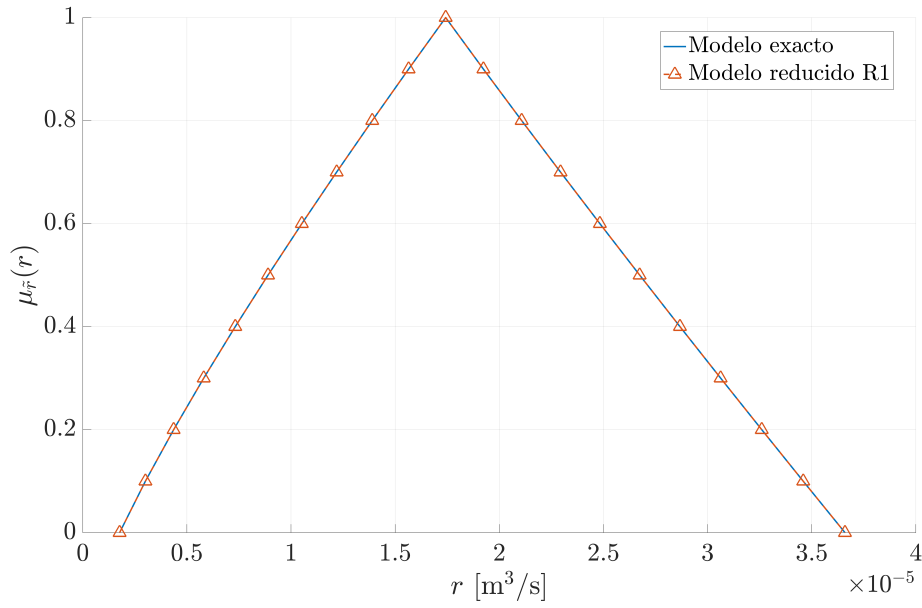


FIGURA 5.14: Función de pertenencia de la respuesta de flujo a la salida de la presa, considerando $\varepsilon_t = 10^{-4}$.

En relación al comportamiento del error, la Figura 5.15 muestra cómo el error se mantiene debajo de la tolerancia establecida para todos los niveles de pertenencia estimados. Para analizar el comportamiento del error, observe que la Figura 5.16 presenta el número de análisis adicionales realizados para determinar los límites de la respuesta difusa para cada nivel α_l . Note que para los primeros dos niveles, α_1 y α_2 , no fue necesario enriquecer la base reducida, sin embargo, para el caso del nivel α_3 se requirió actualizar una vez la base.

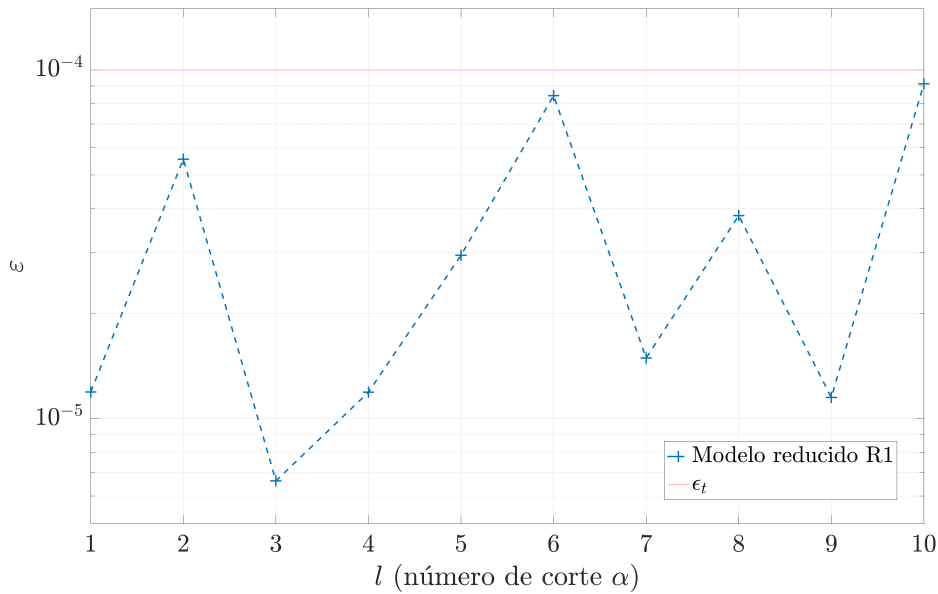


FIGURA 5.15: Comportamiento del error considerando $\varepsilon_t = 10^{-4}$.

Tenga en cuenta que lo anterior produce la disminución del error obtenido para ese nivel en la Figura 5.15. Luego, debido al aumento sostenido del error desde el nivel α_3 al α_6 , para determinar los límites del nivel α_7 se requirió de un nuevo análisis adicional. Finalmente, para el nivel de pertenencia α_9 se necesitó de otro análisis adicional, obteniéndose un total de 3 análisis adicionales durante todo el proceso de optimización.

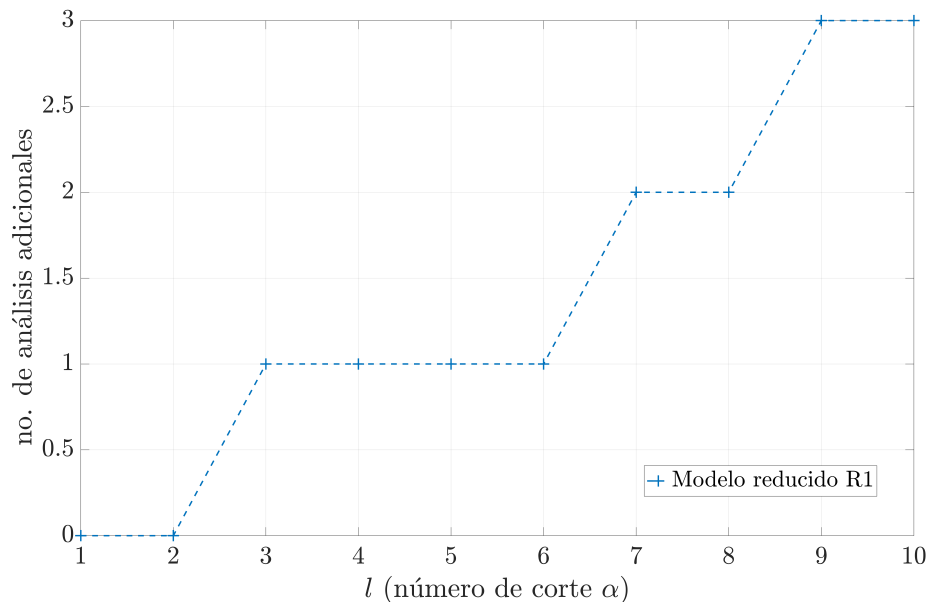


FIGURA 5.16: Análisis adicionales requeridos cuando $\varepsilon_t = 10^{-4}$.

5.3. Conclusiones del Capítulo 5

En el capítulo final de este estudio se probó la metodología propuesta para obtener la respuesta difusa en dos modelos lineales. En el problema del pilote fue posible capturar la incertidumbre espacial alojada en el balasto del suelo de fundación; mientras que en el de flujo, el objetivo estuvo en caracterizar la permeabilidad incierta del suelo bajo la presa. En ambos ejemplos se obtuvo una significativa ganancia en el tiempo de cómputo asociado a la propagación de dicha incertidumbre, mediante el modelo de orden reducido. Esta ventaja continuó siendo significativa cuando se definió una tolerancia máxima para el error cometido por el modelo aproximado. Vale decir, la técnica propuesta resultó ser eficiente para controlar la calidad de los resultados.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

Este estudio ha presentado una estrategia eficiente para estimar la respuesta difusa de modelos lineales sometidos a cargas estáticas, considerando la incertidumbre presente en las propiedades de la estructura y solicitaciones. Para ello, esta propuesta se formuló mediante las herramientas del análisis difuso por medio de la aplicación de un esquema de optimización. En particular, se abordaron los siguientes desafíos: (1) la posibilidad de que los parámetros inciertos asociados a las propiedades de la estructura posean dependencias espaciales, y (2) el elevado costo numérico asociado a la estimación de la función de pertenencia de la respuesta del sistema.

Para capturar la incertidumbre alojada en los parámetros que eran dependientes de alguna medida del espacio, se utilizaron campos difusos para su caracterización. Esta metodología, que fue construida como una extensión del trabajo desarrollado con campos de intervalo y variables difusas, resultó una opción ideal para incorporar al MEF la incertidumbre de propiedades estructurales que se obtienen o derivan de mediciones discretas en el espacio. Esto se debió a que la incertidumbre presente en dichas propiedades (como el balasto y permeabilidad del suelo analizados en este estudio) se redujo a la información disponible en ubicaciones específicas del dominio (puntos de control). Esto último abre el camino a una futura aplicación práctica de la metodología propuesta.

Posteriormente, esta incertidumbre se propagó por medio de un modelo de orden reducido, que permitió proyectar las ecuaciones de equilibrio del sistema en una base de menor dimensión. La metodología empleada presentó la ventaja de requerir un único análisis exacto para construir dicha base reducida. Esta base se fue enriqueciendo estratégicamente con el objetivo de asegurar la precisión de la aproximación y eficiencia en los tiempos de cómputo.

Tras aplicar la técnica propuesta en dos modelos lineales sencillos, se demostró que se puede obtener una estimación precisa de la respuesta difusa del sistema con un menor esfuerzo numérico, controlando la calidad de los resultados. Lo anterior se reflejó en el buen desempeño observado en el modelo de orden reducido y, particularmente, su acople con la aplicación de campos difusos para propagar la incertidumbre a la respuesta. No obstante, los resultados expuestos deben considerarse como una primera aproximación al análisis de campos difusos. De donde, existen diversos aspectos a ser mejorados. Entre ellos se tiene:

- Incluir un análisis más completo del campo difuso, considerando más niveles de pertenencia α ; y, eventualmente, más información sobre la incertidumbre del problema. Por ejemplo, más mediciones dentro del dominio del modelo.

- Realizar un análisis de sensibilidad más acabado respecto de los parámetros involucrados en el problema, para mejorar su caracterización; así como, estudiar el efecto de incorporar términos de segundo orden a la base reducida.

Asimismo, para continuar esta línea de investigación en el futuro, se plantea:

- Para el caso de propiedades anisotrópicas como la permeabilidad del suelo, se propone analizar otras estrategias para incorporar estructuras de dependencia en los puntos de control y entre puntos de control. Por ejemplo, incluir la descomposición de *conjuntos admisibles bivariados* presentada por Faes y Moens [51, 52].
- Explorar distintas mallas de elementos finitos y desarrollar modelos numéricos de sistemas más complejos. Por ejemplo, extender el alcance de la técnica desarrollada para su aplicación a sistemas dinámicos, o sistemas con comportamiento no lineal de los materiales.

Bibliografía

- [1] D. Moens and D. Vandepitte, "A survey of non-probabilistic uncertainty treatment in finite element analysis," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, no. 12-16, pp. 1527–1555, 2005.
- [2] B. Möller and M. Beer, "Engineering computation under uncertainty – Capabilities of non-traditional models," *Computers & Structures*, vol. 86, no. 10, pp. 1024–1041, 2008.
- [3] Y. Cai, F. Bransby, C. Gaudin, and M. Uzielli, "A framework for the design of vertically loaded piles in spatially variable soil," *Computers and Geotechnics*, vol. 134, p. 104140, jun 2021.
- [4] D. Degrauwe, G. Lombaert, and G. De Roeck, "Improving interval analysis in finite element calculations by means of affine arithmetic," *Computers & Structures*, vol. 88, no. 3-4, pp. 247–254, 2010.
- [5] Y. Li, Y. Chen, Q. Zhang, and R. Kang, "Belief reliability analysis of multi-state deteriorating systems under epistemic uncertainty," *Information Sciences*, vol. 604, pp. 249–266, aug 2022.
- [6] G. Schuëller, "On the treatment of uncertainties in structural mechanics and analysis," *Computers & Structures*, vol. 85, pp. 235–243, mar 2007.
- [7] D. Moens and D. Vandepitte, "Interval sensitivity theory and its application to frequency response envelope analysis of uncertain structures," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, no. 21, pp. 2486–2496, 2007.
- [8] M. Valdebenito, C. Pérez, H. Jensen, and M. Beer, "Approximate fuzzy analysis of linear structural systems applying intervening variables," *Computers & Structures*, vol. 162, no. 162, pp. 116–129, 2016.
- [9] M. A. Valdebenito, H. B. Hernández, and H. A. Jensen, "Probability sensitivity estimation of linear stochastic finite element models applying line sampling," *Structural Safety*, vol. 81, p. 101868, nov 2019.
- [10] A. Sofi and E. Romeo, "A novel interval finite element method based on the improved interval analysis," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 311, pp. 671–697, 2016.
- [11] M. Faes and D. Moens, "Identification and quantification of spatial interval uncertainty in numerical models," *Computers & Structures*, vol. 192, pp. 16 – 33, 2017.
- [12] M. Valdebenito, H. Jensen, P. Wei, M. Beer, and A. Beck, "Application of a Reduced Order Model for Fuzzy Analysis of Linear Static Systems," *ASCE-ASME*

- Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems Part B: Mechanical Engineering*, vol. 7, 04 2021. 020904.
- [13] B. Möller, W. Graf, and M. Beer, "Fuzzy structural analysis using α -level optimization," *Computational Mechanics*, vol. 26, no. 6, pp. 547–565, 2000.
- [14] S. Freitag, B. Cao, J. Ninić, and G. Meschke, "Recurrent neural networks and proper orthogonal decomposition with interval data for real-time predictions of mechanised tunnelling processes," *Computers & Structures*, vol. 207, pp. 258 – 273, 2018.
- [15] S. Lewis, Morgan, *Finite Element Method in Heat Transfer*. John Wiley Sons, July 1996.
- [16] J. Lu, J. Li, Z. Song, W. Zhang, and C. Yan, "Uncertainty and sensitivity analysis of heat transfer in hypersonic three-dimensional shock waves/turbulent boundary layer interaction flows," *Aerospace Science and Technology*, vol. 123, p. 107447, apr 2022.
- [17] M. Forster, F. Seibold, T. Krille, C. Waidmann, B. Weigand, and R. Poser, "A monte carlo approach to evaluate the local measurement uncertainty in transient heat transfer experiments using liquid crystal thermography," *Measurement*, vol. 190, p. 110648, feb 2022.
- [18] D. Moens and M. Hanss, "Non-probabilistic finite element analysis for parametric uncertainty treatment in applied mechanics: Recent advances," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 47, no. 1, pp. 4–16, 2011.
- [19] K. Fujita and I. Takewaki, "An efficient methodology for robustness evaluation by advanced interval analysis using updated second-order Taylor series expansion," *Engineering Structures*, vol. 33, no. 12, pp. 3299–3310, 2011.
- [20] R. Haftka and Z. Gürdal, *Elements of Structural Optimization*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 3rd ed., 1992.
- [21] J. Hurtado and D. Alvarez, "Neural-network-based reliability analysis: A comparative study," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, no. 1-2, pp. 113–132, 2001.
- [22] S. Freitag, M. Beer, W. Graf, and M. Kaliske, "Lifetime prediction using accelerated test data and neural networks," *Computers & Structures*, vol. 87, no. 19-20, pp. 1187–1194, 2009. Civil-Comp Special Issue.
- [23] S. Freitag, W. Graf, and M. Kaliske, "A material description based on recurrent neural networks for fuzzy data and its application within the finite element method," *Computers & Structures*, vol. 124, pp. 29–37, 2013.
- [24] S. Boyaval, C. Le Bris, Y. Maday, N. Nguyen, and A. Patera, "A reduced basis approach for variational problems with stochastic parameters: Application to heat conduction with variable Robin coefficient," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, no. 41, pp. 3187 – 3206, 2009.
- [25] M. Hanss, *Applied Fuzzy Arithmetic*. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [26] W. Verhaeghe, W. Desmet, D. Vandepitte, and D. Moens, "Interval fields to represent uncertainty on the output side of a static FE analysis," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 260, pp. 50–62, 2013.

- [27] D. Shepard, "A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data," in *Proceedings of the 1968 23rd ACM national conference*, pp. 517–524, 1968.
- [28] A. Der Kiureghian and J.-B. Ke, "The stochastic finite element method in structural reliability," *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 3, no. 2, pp. 83–91, 1988.
- [29] W. Dong and H. C. Shah, "Vertex method for computing functions of fuzzy variables," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 24, pp. 65–78, oct 1987.
- [30] O. C. Zienkiewicz, *The finite element method*. Oxford Boston: Butterworth-Heinemann, 2000.
- [31] M. K. Deb, I. Babuska, and J. T. Oden, "Solution of stochastic partial differential equations (spdes) using galerkin method and finite element techniques," 2006.
- [32] C. Gogu and J.-C. Passieux, "Efficient surrogate construction by combining response surface methodology and reduced order modeling," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 47, no. 6, pp. 821–837, 2013.
- [33] I. González, M. Valdebenito, J. Correa, and H. Jensen, "Calculation of second order statistics of uncertain linear systems applying reduced order models," *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 190, p. 106514, 2019.
- [34] A. Noor and H. Lowder, "Approximate techniques of structural reanalysis," *Computers & Structures*, vol. 4, no. 4, pp. 801–812, 1974.
- [35] J. Taylor, *Kernel methods for pattern analysis*. Cambridge, UK New York: Cambridge University Press, 2004.
- [36] C. Gogu, A. Chaudhuri, and C. Bes, "How adaptively constructed reduced order models can benefit sampling-based methodsfor reliability analyses," *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, vol. 23, no. 05, p. 1650019, 2016.
- [37] J. Kennedy and R. Eberhart, "Particle swarm optimization," in *Proceedings of ICNN'95-International Conference on Neural Networks*, vol. 4, (Perth, WA, Australia), pp. 1942–1948, IEEE, 1995.
- [38] M. E. H. Pedersen, "Good parameters for particle swarm optimization," 2010.
- [39] E. Mezura-Montes and C. A. C. Coello, "Constraint-handling in nature-inspired numerical optimization: Past, present and future," *Swarm and Evolutionary Computation*, vol. 1, pp. 173–194, dec 2011.
- [40] W. Gautschi, *Numerical Analysis*. Birkhäuser Boston, 2nd ed., 2012.
- [41] D. Griffiths, J. Paiboon, J. Huang, and G. Fenton, "Reliability analysis of beams on random elastic foundations," *Géotechnique*, vol. 63, no. 2, pp. 180–188, 2013.
- [42] C. A. Felippa, *Introduction to Finite Element Methods*. University of Colorado-Boulder, Colorado 80309-0429, USA, 2004.
- [43] "ASTM D4050-20: Standard test method for (field procedure) for withdrawal and injection well testing for determining hydraulic properties of aquifer systems," *Soil and Rock, West Conshohocken, Pennsylvania*, 2020.
- [44] W. H. Hager, A. J. Schleiss, R. M. Boes, and M. Pfister, *Hydraulic Engineering of Dams*. CRC Press, nov 2020.

- [45] G. Li, Z. Shen, and C. Yang, "A simplified calculation method of seepage flux for slope-wall rock-fill dams with a horizontal blanket," *Applied Sciences*, vol. 10, p. 3848, jun 2020.
- [46] G. Baroni, M. Zink, R. Kumar, L. Samaniego, and S. Attinger, "Effects of uncertainty in soil properties on simulated hydrological states and fluxes at different spatio-temporal scales," *Hydrology and Earth System Sciences*, vol. 21, pp. 2301–2320, may 2017.
- [47] J. Teng, J. Kou, S. Zhang, and D. Sheng, "Evaluating the influence of specimen preparation on saturated hydraulic conductivity using nuclear magnetic resonance technology," *Vadose Zone Journal*, vol. 18, pp. 1–7, jan 2019.
- [48] Y.-F. Deng, A.-M. Tang, Y.-J. Cui, and X.-L. Li, "Study on the hydraulic conductivity of boom clay," *Canadian Geotechnical Journal*, vol. 48, pp. 1461–1470, oct 2011.
- [49] Z. Zeng, Y.-J. Cui, and J. Talandier, "Evaluating the influence of soil plasticity on hydraulic conductivity based on a general capillary model," *Engineering Geology*, vol. 278, p. 105826, dec 2020.
- [50] J. R. Fanchi, "4 - porosity and permeability," in *Integrated Reservoir Asset Management* (J. R. Fanchi, ed.), pp. 49–69, Boston: Gulf Professional Publishing, 2010.
- [51] M. Faes and D. Moens, "Multivariate dependent interval finite element analysis via convex hull pair constructions and the extended transformation method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 347, pp. 85–102, apr 2019.
- [52] M. Faes and D. Moens, "On auto- and cross-interdependence in interval field finite element analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 121, pp. 2033–2050, may 2020.