

UNIVERSIDAD ADOLFO IBAÑEZ

TESIS DE MAGÍSTER

**Funciones convexas de orden alfa y la derivada
Schwarziana**

Autor:
PABLO CARRASCO
ROMERO

Profesores guía:
DR. RODRIGO
HERNÁNDEZ REYES

*Tesis realizada acorde a los requerimientos para el grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería, mención en sistemas de información
de la*

Facultad de Ingeniería y Ciencias

8 de septiembre de 2022

UAI

FACULTAD DE
INGENIERÍA Y
CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBAÑEZ

Resumen

Facultad de Ingeniería y Ciencias

Magíster en Ciencias de la Ingeniería, mención en sistemas de información

Funciones convexas de orden alfa y la derivada Schwarziana

por PABLO CARRASCO ROMERO

El objetivo principal de esta tesis, para optar al grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería de la Universidad Adolfo Ibáñez, consiste en estudiar el comportamiento de la norma de la derivada Schwarziana sobre algunas clases de funciones convexas definidas en el disco $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, mediante el uso del lema de Schwarz y algunas de sus generalizaciones. En particular, queremos extender un resultado ya demostrado por [Nehari \(1976\)](#) y posteriormente actualizado en [Chuaqui et al. \(2011\)](#) en el cual se demuestra una cota precisa asociada a la norma del operador conocido como derivada Schwarziana para la clase de funciones convexas definidas en el disco.

Principalmente describiremos y trabajaremos con una sub clase especial de funciones denominadas convexas de orden α con $0 \leq \alpha < 1$, de modo que cuando $\alpha = 0$ obtenemos al conjunto de funciones convexas descrito anteriormente. Entregaremos una nueva caracterización de esta clase de funciones mediante el principio de subordinación, considerando una transformación de Möbius que envía al disco $\mathbb{D}$ en el semiplano $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\{w\} > \alpha\}$ y aplicaremos un razonamiento análogo al usado en [Chuaqui et al. \(2011\)](#) para obtener el resultado principal de este trabajo que consiste en obtener una cota de la derivada Schwarziana asociada a la clase de funciones convexas de orden α con segunda derivada compleja nula en el origen.

También analizaremos otro resultado importante entregado por [Suita \(1996\)](#) que describe una cota precisa para la norma de la derivada Schwarziana para funciones convexas de orden α , la cual compararemos con el resultado propuesto en este trabajo para obtener un corolario o consecuencia asociada a la clase de funciones convexas de orden α con segunda derivada nula en el origen.

Para complementar los resultados anteriores, también se propone como objetivo la elaboración e implementación de un programa realizado en el lenguaje de programación Python, que permita identificar y clasificar , tanto de forma geométrica como numérica, si una función compleja definida en el disco $\mathbb{D}$ es convexa de orden α y en caso de cumplir dicha definición, obtener numéricamente una aproximación de dicho parámetro α , con $0 \leq \alpha < 1$.

Palabras clave: funciones convexas, orden alpha, derivada Schwarziana, lema de Schwarz, lema de Schwarz-Pick, python.

Reconocimientos

En primer lugar, quisiera agradecer profundamente a mi profesor de tesis Dr. Rodrigo Hernández Reyes ya que, sin su motivación, apoyo y amistad, no podría estar escribiendo estas líneas. También quiero agradecer al profesor y colega Mg. Víctor Bravo por darme la confianza en aceptar este desafío, compartiendo su amistad además de su valiosa experiencia, consejos y cafés, los cuales han sido parte fundamental en este camino.

Este trabajo está dedicado a mi familia y a todos los amigos, colegas y alumnos que me apoyaron. A mis hijos Cristian, Francisco y Constanza, y a mi esposa Gabriela les agradezco todo el apoyo incondicional, amor y comprensión que me han dado en este inolvidable y hermoso proceso. A mis padres agradezco que nunca hayan dejado de creer en mí y este trabajo es también de ellos.

También quisiera agradecer a la Universidad Adolfo Ibáñez junto con sus profesores y funcionarios, por acogerme como alumno y a la vez como docente, además de entregarme valiosas herramientas que fueron esenciales para la obtención del grado y que a su vez me motivaron enormemente para la investigación.

Este trabajo fue parcialmente apoyado por el proyecto FONDECYT número 119756.

Índice general

Resumen	I
Reconocimientos	III
1. Introducción	1
1.1. Definiciones elementales	2
1.2. Funciones univalentes	3
1.3. Criterios de univalencia	5
1.4. La derivada Schwarziana	5
2. Estado del arte	8
2.1. Funciones convexas	8
2.2. La clase de Caratheódory	9
2.3. Funciones convexas de orden alfa	10
2.4. Ejemplo de función convexa de orden alfa	11
3. Objetivos y metodología	16
3.1. Definición de las hipótesis	16
3.2. Uso de Python	19
4. Resultados	20
4.1. Funciones convexas de orden alfa con $f''(0)=0$	20
4.2. Funciones convexas de orden alfa	24
5. Conclusiones	27
5.1. Conclusiones generales	27
5.2. Trabajo posterior	27
A. Códigos implementados	29
A.1. Desarrollo algebraico	29
A.2. Visualización en el plano complejo	30
A.3. Aproximación del orden de convexidad de una función convexa	32

Capítulo 1

Introducción

La noción de conjunto convexo es clave en la formulación y resolución de problemas de optimización dentro de las ciencias en general y particularmente dentro de la ingeniería, ya que los procesos asociados a su solución permiten que la investigación se desarrolle, proponiendo tecnologías y métodos nuevos y cada vez mejores. La formulación matemática precisa de conjunto convexo en el plano indica que todo par de puntos en el conjunto se pueden conectar a través de un segmento rectilíneo en el plano, donde el segmento está completamente contenido en el conjunto. Esta definición puramente geométrica se ha extendido y caracterizado, por ejemplo, en otras ramas de la matemática como Álgebra Lineal y Topología. También, en el Análisis Complejo y en particular en la Teoría Geométrica de Funciones (TGF), existe una caracterización que relaciona imágenes en el plano complejo de funciones definidas en el disco unitario con ciertas condiciones de normalización, llamadas funciones convexas, con propiedades analíticas. En este trabajo estudiaremos el comportamiento de un operador diferencial llamado derivada Schwarziana (propiedad analítica) sobre una generalización de función convexa y obtendremos resultados asociados a la cota de una métrica asociada a la derivada Schwarziana sobre la clase de este tipo de funciones.

En este capítulo entregamos algunas definiciones elementales asociadas al análisis complejo y que ocuparemos en nuestro estudio, junto con otros conceptos más específicos asociados a la Teoría de Funciones Univalentes (TFU), la derivada Schwarziana y criterios de univalencia, los cuales entregan una primera imagen de la relación fundamental entre propiedades analíticas y geométricas del plano. En el Capítulo 2 proponemos las definiciones y relaciones que serán clave en nuestro estudio las funciones convexas y su caracterización a través de la clase de Carathéodory, junto con la clase de funciones objetivo de esta tesis: las funciones convexas de orden α . En el Capítulo 3 definimos la hipótesis de esta tesis junto con las dos metodologías que aplicaremos en nuestro estudio. La primera consiste en la utilización de un resultado fundamental del Análisis Complejo denominado el Lema de Schwarz, junto con alguna de sus generalizaciones, considerando como inspiración lo realizado por [Chuaqui et al. \(2011\)](#) para el caso de funciones convexas. La segunda metodología consiste en la aplicación de lo aprendido durante el desarrollo del Magíster en Ciencias de la Ingeniería, considerando el lenguaje de programación Python para apoyar el razonamiento, cálculo y visualización de los resultados propuestos en esta tesis. Posteriormente en el Capítulo 4 proponemos y demostramos los resultados principales asociados a las funciones convexas de orden α considerando dos hipótesis distintas: con segunda derivada nula y no nula en el origen.

1.1. Definiciones elementales

Dentro del análisis complejo, definimos el conjunto de los números complejos como:

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}.$$

Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ entonces definimos la parte real e imaginaria de z como:

$$\operatorname{Re}\{z\} = x \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}\{z\} = y.$$

El conjunto $\mathbb{C}$ tiene estructura de cuerpo con las operaciones usuales de suma y multiplicación compleja. Si $z, w \in \mathbb{C}$ entonces:

$$z + w = (\operatorname{Re}\{z\} + \operatorname{Re}\{w\}) + i(\operatorname{Im}\{z\} + \operatorname{Im}\{w\}),$$

$$z \cdot w = (\operatorname{Re}\{z\} \cdot \operatorname{Re}\{w\} - \operatorname{Im}\{z\} \cdot \operatorname{Im}\{w\}) + i(\operatorname{Re}\{z\} \cdot \operatorname{Im}\{w\} + \operatorname{Im}\{z\} \cdot \operatorname{Re}\{w\}).$$

Dos operaciones importante en $\mathbb{C}$ son el conjugado y módulo de un número complejo los cuales de definen, respectivamente, como:

$$\bar{z} = \operatorname{Re}\{z\} - i\operatorname{Im}\{z\} \quad \text{y} \quad |z| = \sqrt{\operatorname{Re}\{z\}^2 + \operatorname{Im}\{z\}^2} \geq 0.$$

Notemos que $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

A continuación, presentaremos algunos conceptos esenciales del análisis complejo que nos permitirán enunciar los resultados de este trabajo. Definimos el disco unitario como el siguiente conjunto:

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

En la Figura 1.1 está representado geométricamente el disco considerando segmentos radiales partiendo del origen y circunferencias de radio estrictamente menor a 1, teniendo en cuenta que $\mathbb{D}$ es un conjunto abierto.

Análogamente a lo realizado en $\mathbb{R}$, una función compleja de variable compleja es aquella función que a cada elemento z de algún subconjunto A de $\mathbb{C}$ le asocia un único número complejo $w = f(z)$ y la denotamos como $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Toda función compleja de variable compleja se puede representar como:

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

donde u y v son funciones reales de dos variables y se denominan la parte real e imaginaria de f , respectivamente. También es importante mencionar que el módulo de un número complejo permite definir un estructura en $\mathbb{C}$ como espacio métrico, por lo que las nociones de límite y derivada son análogas a las que se definen en $\mathbb{R}$.

Observación: Aún cuando las definiciones anteriores se plantean de manera análoga al caso real, debemos tener en cuenta que en el caso de las funciones complejas, la noción de límite se trabaja respecto de la topología de $\mathbb{R}^2$.

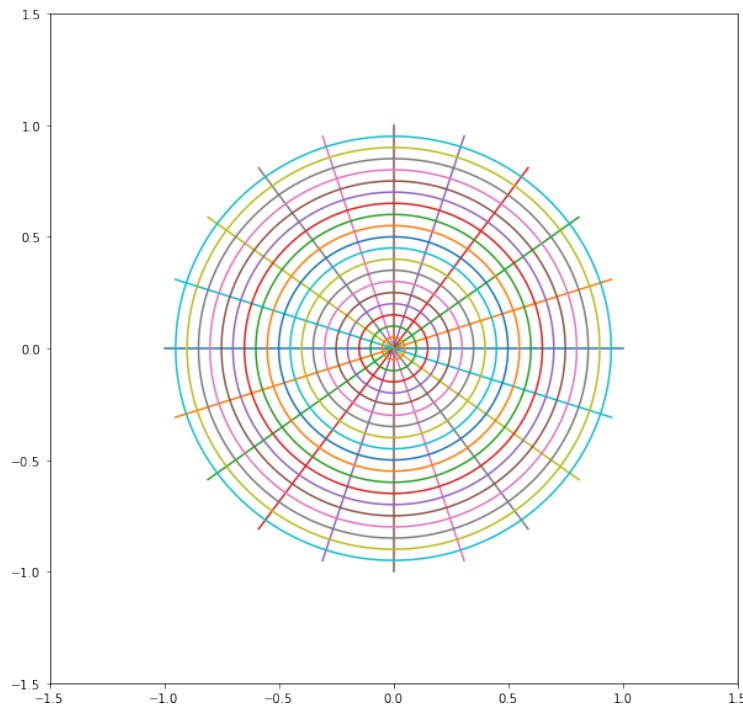


FIGURA 1.1: Disco unitario en el plano complejo.

1.2. Funciones univalentes

En la TGF se estudian las propiedades geométricas de conjuntos en el plano considerando el comportamiento de funciones complejas analíticas (que tienen un desarrollo en serie de Taylor), se define la clase S o clase de funciones schlicht o simples, como el conjunto de todas funciones $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ univalentes y analíticas en $\mathbb{D}$ junto con las siguientes condiciones adicionales de normalización: $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. La clase S y algunas de sus sub clases de funciones son objetos de estudio muy importantes dentro de la TGF ya que muestran relaciones concretas entre propiedades geométricas de conjuntos del plano con definiciones asociadas a otras áreas de la matemática como el cálculo y análisis. Aún cuando la suma de dos funciones de la clase S no necesariamente sea una función de la misma clase, ella si es cerrada respecto de muchas operaciones o transformaciones elementales. Por nombrar algunas, tenemos que si $f \in S$ entonces la clase S es:

- cerrada por conjugación: si $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ entonces $g \in S$.
- cerrada por rotación: si $g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z)$ entonces $g \in S$.
- cerrada por dilatación: si $g(z) = r^{-1} f(rz)$, con $0 < r < 1$, entonces $g \in S$.

Una descripción más profunda de las funciones univalentes y en particular de las funciones de la clase S y sus propiedades, está claramente expuesta por [Duren \(1983\)](#)

Para una función en la clase S , la propiedad de univalencia es equivalente a ser inyectiva en su dominio (o equivalentemente que todo par de elementos distintos tienen imágenes distintas) y cuya característica geométrica, dentro del contexto de la TGF consiste en que el conjunto asociado a la imagen de cualquier círculo centrado en el origen y de radio menor a 1, define un dominio de Jordan en el plano complejo,

o sea que ningún arco de curva se autointersecta. En la Figura 1.2 se muestra la imagen asociada a circunferencias de la forma $|z| = r$ con $0 < r < 1$, bajo la función:

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{(1-z)^2} + \frac{z}{(1+z)^2} \right). \quad (1.1)$$

Note que, para valores de r lo suficientemente grandes, la imagen del círculo $|z| = r$ entrega una curva que se autointersecta. Es importante notar que aún cuando las funciones $z/(1-z)^2$ y $z/(1+z)^2$ pertenecen a la clase S , el promedio entre ellas no.

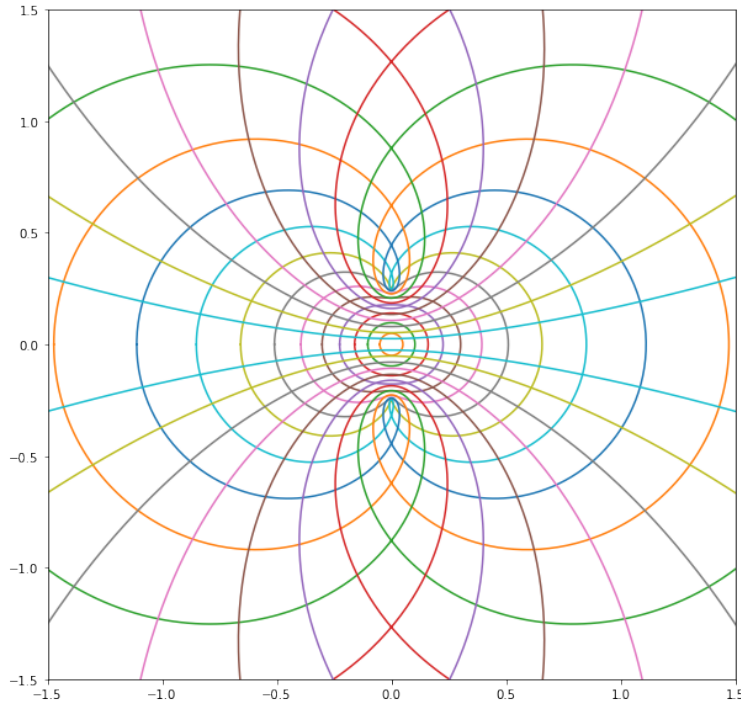


FIGURA 1.2: Imagen de $\mathbb{D}$ asociada a la función (1.1).

Por otro lado, toda función en la clase S es analítica en $\mathbb{D}$ lo cual en su definición más simple plantea la representación en serie de potencias respecto de cualquier punto de $\mathbb{D}$. Esta propiedad también es caracterizada de múltiples formas en el análisis complejo, por ejemplo, a través de las ecuaciones de Cauchy-Riemann o mediante la derivación compleja (ver [Muir \(2015\)](#)). En general, toda función f de la clase S puede ser representada como la siguiente serie de potencias centrada en el origen:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \text{ para todo } z \in \mathbb{D}, \quad (1.2)$$

tal que $a_n \in \mathbb{C}$ para todo $n \geq 2$. Es relevante mencionar que las funciones analíticas son infinitas veces derivables y que la derivada de una función analítica es también analítica en su dominio.

1.3. Criterios de univalencia

Uno de los resultados más importantes y característicos en la TGF fue la demostración de la conjetura de Bieberbach por parte de [de Branges \(1985\)](#), la cual enuncia que toda función f en la clase S cumple que:

$$|a_n| \leq n \text{ para todo } n \geq 2,$$

donde los coeficientes a_n están asociados a la función f cuando se representa de la forma (1.2). La proposición anterior fue conjeturada y demostrada solo para el caso $n = 2$ por [Bieberbach \(1916\)](#) a través del teorema del área. Posteriormente los casos $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ y $n = 6$ fueron comprobados en el transcurso del siglo 20 hasta la demostración del caso general por de Branges en 1985.

El resultado propuesto por Bieberbach y demostrado por de Branges, presenta una idea central en la TGF que consiste en caracterizar propiedades geométricas de conjuntos en el plano en términos de definiciones puramente analíticas asociadas a funciones complejas definidas en algún subconjunto de $\mathbb{C}$. En particular, la propiedad de ser univalente está directamente relacionada con el valor de los coeficientes de su serie de potencias centrada en el origen, tal como lo propone Bieberbach en su conjetura, por lo que es interesante preguntarse si algunas otras propiedades de conjuntos del plano, como por ejemplo la convexidad, están de alguna manera relacionadas con cualidades analíticas de funciones definidas en algún subconjunto del plano complejo.

Es importante mencionar, en el contexto asociado a las funciones de la clase S , a la función de Koebe:

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (1.3)$$

la cual se presenta como el ejemplo maximal, junto con sus rotaciones, tanto de la conjetura de Bieberbach (notar que $|a_n| = n$ para todo $n \geq 1$) como de otros problemas dentro de la TFU, ver [Duren \(1983\)](#). En la Figura 1.3 se muestra la imagen del disco $\mathbb{D}$ (ver Figura 1.1) bajo la función de Koebe.

1.4. La derivada Schwarziana

De la misma forma como ocurre entre la univalencia de una función, que se entiende como una propiedad geométrica asociada a la imagen del disco, y los coeficientes asociados a la serie de Taylor de dicha función, [Kraus \(1932\)](#) entrega una condición necesaria para la univalencia respecto del operador diferencial conocido como derivada Schwarziana $\mathcal{S}$, que se define como:

$$\mathcal{S}f(z) = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2, \quad (1.4)$$

donde f es una función analítica. El resultado dado por Kraus indica que si f es analítica y univalente, entonces:

$$(1 - |z|^2)^2 \cdot |\mathcal{S}f(z)| \leq 6, \text{ para todo } z \in \mathbb{D}. \quad (1.5)$$

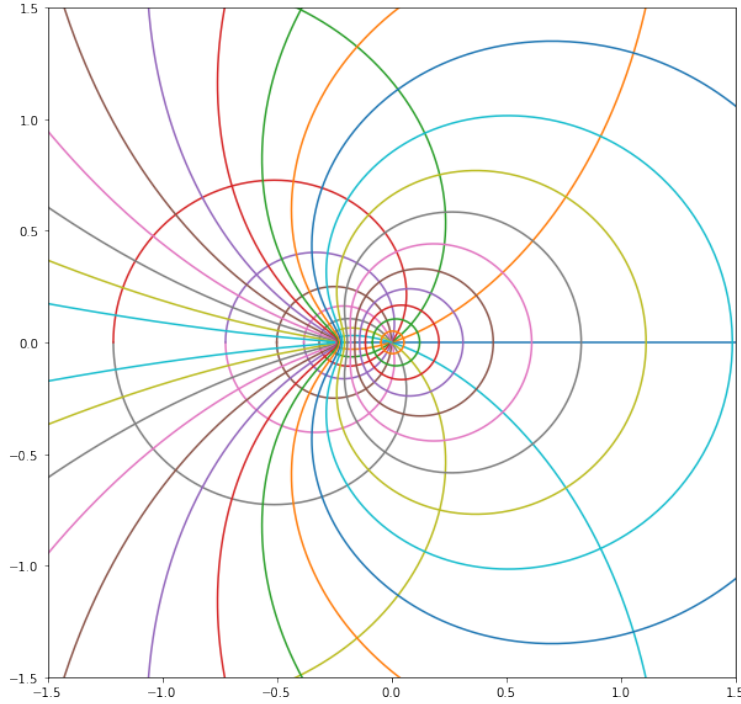


FIGURA 1.3: Imagen del disco bajo la función de Koebe.

Para complementar la definición propuesta en (1.4), llamamos a la expresión:

$$\mathcal{P}f(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)},$$

la pre Schwarziana de f .

Siguiendo esta idea [Nehari \(1949\)](#), además de redescubrir el resultado propuesto por Kraus, entrega una condición suficiente para la univalencia de una función definida en $\mathbb{D}$, Nehari muestra que toda función localmente univalente (o equivalentemente $f'(z) \neq 0$) y analítica en $\mathbb{D}$ que satisface la siguiente desigualdad:

$$(1 - |z|^2)^2 \cdot |\mathcal{S}f(z)| \leq 2, \text{ para todo } z \in \mathbb{D}, \quad (1.6)$$

es necesariamente univalente en $\mathbb{D}$. Las cotas obtenidas en (1.5) y (1.6) son precisas en el sentido que no hay otras que sean menores a las propuestas. Sea f una función analítica, entonces definimos la norma Schwarziana como:

$$\|\mathcal{S}f\| = \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^2 \cdot |\mathcal{S}f(z)|. \quad (1.7)$$

Combinando los resultados obtenidos anteriormente junto con la definición de norma Schwarziana, tenemos el siguiente criterio de univalencia en términos de la derivada Schwarziana: f pertenece a la clase S si y solo si $\|\mathcal{S}f\| \leq 2$. La función de Koebe definida en (1.3) también se presenta como ejemplo maximal asociado a (1.6), ya que:

$$\mathcal{S}k(z) = \frac{-6}{(1 - z^2)^2} \implies \|\mathcal{S}k(z)\| = 6.$$

Como se puede apreciar, el análisis del comportamiento de la derivada Schwarziana permite obtener resultados asociados a la univalencia de funciones definidas en el disco. Parte de la motivación e historia de la derivada Schwarziana está desarrollada por Osgood (1998).

Es relevante para nuestro estudio enunciar algunas propiedades de la derivada Schwarziana definida en (1.4):

- La derivada Schwarziana caracteriza a las transformaciones de Möbius, esto es:

$$\mathcal{S}f(z) = 0 \iff f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ con } ad - bc \neq 0. \quad (1.8)$$

- Regla de la cadena:

$$\mathcal{S}(f \circ g)(z) = (\mathcal{S}f \circ g)(z) \cdot (g'(z))^2 + \mathcal{S}g(z).$$

- Invariancia respecto de las transformaciones de Möbius: Si f es de la forma (1.8), entonces:

$$\mathcal{S}(f \circ g)(z) = \mathcal{S}g(z).$$

Capítulo 2

Estado del arte

En este capítulo describiremos algunos resultados importantes asociados a las funciones convexas, el cual es uno de los principales objetos de estudio en este trabajo. La idea general es entregar las definiciones elementales y presentar una generalización del concepto de función convexa dentro de la clase S .

2.1. Funciones convexas

Sea f una función de la clase S . Diremos que f es una función convexa si envía de manera conforme (preserva ángulos y orientación) al disco $\mathbb{D}$ en un conjunto convexo en el plano complejo $\mathbb{C}$. Denotamos por C a la clase de funciones convexas definidas en $\mathbb{D}$. Continuando con la idea central en la TGF, también existe una relación entre las funciones convexas (propiedad geométrica asociada a conjuntos del plano) y la derivada Schwarziana, en particular [Nehari \(1976\)](#) muestra que la cota obtenida en (1.6), esto es:

$$(1 - |z|^2)^2 \cdot |Sf(z)| \leq 2,$$

también es válida cuando f pertenece a la clase C .

La clase C resulta ser un caso especial de una clase más general de funciones dentro de S , denominada clase de funciones estrelladas respecto del origen o clase S^* , la cual se define como aquellas funciones (de la clase S) que envían el disco $\mathbb{D}$ de manera conforme, a un conjunto donde cada punto de la imagen del disco puede ser conectado mediante un segmento rectilíneo con el origen y que está propiamente incluido el conjunto. En particular, la clase de las funciones convexas C es la subclase de S^* , que contiene a las funciones que son estrelladas respecto de todo punto del conjunto. Una equivalencia importante conocida como el Teorema de Alexander relaciona a funciones de la clase C con funciones de la clase S^* : sea f una función analítica en $\mathbb{D}$ con $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, entonces

$$f \in C \iff z \cdot f'(z) \in S^*$$

Para una descripción más detallada de las propiedades de las funciones de la clase C y S^* (ver [Duren \(1983\)](#) y [Graham & Kohr \(2003\)](#)).

El razonamiento que aplica [Nehari \(1976\)](#), para obtener el resultado (1.6) sobre la clase C , consiste en aproximar la imagen de una función convexa mediante polígonos convexas, para posteriormente aplicar la fórmula de Schwarz-Christoffel (ver [Nehari \(2012\)](#)) y concluir el resultado. Sin embargo, [Chuaqui et al. \(2011\)](#) lograron

demostrar la misma afirmación planteada por [Nehari \(1976\)](#) mediante el uso del lema de Schwarz, junto con algunas afirmaciones y ejemplos. Dentro del mismo artículo, los autores completaron y corrigieron una parte de la demostración realizada por [Nehari \(1976\)](#) respecto de la desigualdad estricta para funciones convexas acotadas.

2.2. La clase de Carathéodory

Un resultado fundamental que ocuparemos en este trabajo consiste en caracterizar a las funciones de la clase C con funciones de otra clase, llamada clase P , las cuales se caracterizan por tener parte real positiva. Diremos que una función analítica p definida en $\mathbb{D}$ pertenece a la clase P o de Carathéodory si:

$$p(0) = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{Re} \{p(z)\} > 0, \text{ para todo } z \in \mathbb{D}.$$

Un resultado análogo a la conjetura de Bieberbach en la clase S lo obtiene [Carathéodory \(n.d.\)](#) en la clase P , al demostrar que si $p \in P$ es de la forma:

$$p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

entonces se cumple que, para todo $n \geq 1$,

$$|c_n| \leq 2. \quad (2.1)$$

Cabe mencionar que la función que maximiza la propiedad demostrada por Carathéodory en (2.1) es:

$$p(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n = 1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + 2z^4 + \cdots, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (2.2)$$

La relación fundamental entre la clase C y la clase P plantea que si f es una función analítica en $\mathbb{D}$ tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, entonces

$$f \in C \iff g(z) = 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \in P. \quad (2.3)$$

La siguiente función de la clase S envía de manera conforme al disco en una franja horizontal no acotada en el plano como se muestra en la Figura 2.1:

$$L(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{1+z}{1-z} \right). \quad (2.4)$$

Esta función es analítica y univalente en $\mathbb{D}$, además $L(0) = 0$ y $L'(0) = 1$ donde:

$$L'(z) = \frac{1}{1-z^2} \quad \text{y} \quad L''(z) = \frac{2z}{1-z^2}.$$

Por otro lado,

$$1 + z \frac{L''(z)}{L'(z)} = \frac{1+z^2}{1-z^2} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} - 1.$$

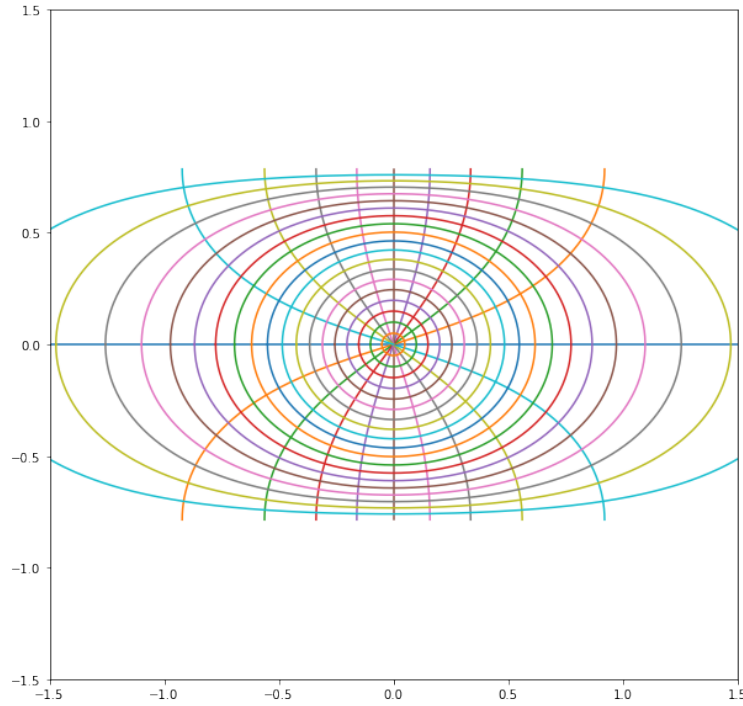


FIGURA 2.1: Imagen del disco asociada a la función (2.4).

Notar que la función dada en (2.4) se presenta como el ejemplo maximal dentro de la clase C ya que maximiza la norma Schwarziana:

$$SL(z) = \frac{2}{(1 - z^2)^2} \implies \|SL\| = 2.$$

A diferencia de la función de Koebe dada en la ecuación (1.3) y que se muestra en la Figura 1.3, tenemos que la función $L(z)$ envía el disco en una región convexa en el plano mientras que la función de Koebe envía el disco en una región estrellada respecto del origen, teniendo en cuenta que la imagen de una circunferencia $|z| = r$ con r lo suficientemente grande es una cardioide y por lo tanto no puede encerrar a un conjunto convexo.

2.3. Funciones convexas de orden alfa

Motivados por la caracterización de funciones convexas dada en (2.3), se define la clase de funciones convexas de orden α , con $0 \leq \alpha < 1$ como aquellas funciones de la clase C que satisfacen:

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} > \alpha, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (2.5)$$

Geométricamente, si f es una función convexa de orden α entonces la función $g(z) = 1 + z \cdot f''(0)/f'(0)$ envía el disco en una región contenida en el semiplano derecho del plano complejo. Denotaremos esta clase como C_α , donde $C_0 = C$ y $C_\alpha \subset C$ para todo $0 \leq \alpha < 1$. Respecto del comportamiento de la norma Schwarziana en la clase C_α , [Suiata \(1996\)](#) demostró mediante el uso de la caracterización de funciones en la clase P considerando su representación como una integral de Poisson-Stieljes

de acuerdo a la fórmula de [Herglotz \(1991\)](#) (ver también [Duren \(1983\)](#)), que si $0 \leq \alpha \leq 1/2$ entonces $(1 - |z|^2)^2 \cdot |\mathcal{S}f(z)| \leq 2$, mientras que si $1/2 < \alpha < 1$ entonces:

$$(1 - |z|^2)^2 \cdot |\mathcal{S}f(z)| \leq 8\alpha(1 - \alpha).$$

Ambas desigualdades son precisas dentro de la clase C_α . En la misma publicación, Suita también entrega el siguiente conjunto de funciones parametrizadas por α que maximizan la norma Schwarziana. En particular, cuando $0 \leq \alpha \leq 1/2$ define la función:

$$f(z) = \int_0^z \frac{1}{(1-w)^{1-2\alpha}(1+w)} dw, \text{ para todo } z \in \mathbb{D}. \quad (2.6)$$

Mientras que para $1/2 < \alpha < 1$ define:

$$f(z) = \int_0^z \frac{1}{(1-w)^{2(1-\alpha)}} dw, \text{ para todo } z \in \mathbb{D}. \quad (2.7)$$

2.4. Ejemplo de función convexa de orden alfa

A continuación presentamos como ejemplo una función convexa de orden α con $0 \leq \alpha < 1$. Para $0 \leq \alpha \leq 1/2$ se propone la función:

$$f(z) = \left(\frac{1+2\alpha}{2} \right) \text{Log} \left(\frac{1 + \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha} \right) z}{1-z} \right), \text{ para todo } z \in \mathbb{D}. \quad (2.8)$$

Por otro lado, para $1/2 < \alpha < 1$ definimos:

$$f(z) = \frac{(1-z)^{-(1-2\alpha)} - 1}{1-2\alpha}, \text{ para todo } z \in \mathbb{D}. \quad (2.9)$$

La expresión para $f(z)$ definida en (2.9) es exactamente igual a aquella propuesta por Suita en (2.7) la cual está también mencionada por [Yamashita \(1999\)](#). Mientras que la expresión para $f(z)$ definida en (2.8) para $0 \leq \alpha \leq 1/2$, se propone en este trabajo como un ejemplo relevante de función convexa de orden α dado en términos de expresiones puramente algebraicas más que en términos de una expresión integral.

A continuación mostraremos que las funciones propuestas en (2.8) y (2.9) son convexas de orden α , además de verificar que satisface la cota propuesta por [Suita \(1996\)](#), en cada caso. Notemos que para todo $0 \leq \alpha < 1$ las funciones definidas anteriormente son analíticas y univalentes. Para el caso $1/2 < \alpha < 1$ tenemos que $f(0) = 0$ y además:

$$f'(z) = (1-z)^{-2(1-\alpha)} \quad \text{y} \quad f''(z) = 2(1-\alpha)(1-z)^{-2(1-\alpha)-1}.$$

Notar que $f'(0) = 1$ y $f''(z) = 2(1-\alpha) \neq 0$. Por otro lado, para mostrar que f es convexa de orden α , calculamos:

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{2(1-\alpha)}{1-z} \implies g(z) = 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1 + (1-2\alpha)z}{1-z}.$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{Re}\{1/(1-z)\} > 1/2$, se tiene:

$$\operatorname{Re}\{g(z)\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{2(1-\alpha)}{1-z} - (1-2\alpha)\right\} > 2(1-\alpha)\frac{1}{2} - 1 + 2\alpha = \alpha.$$

Concluimos para este caso, que f es convexa de orden α . Obtenemos una cota para la expresión $(1-|z|^2)^2 \cdot |\mathcal{S}f(z)|$, considerando que:

$$\mathcal{S}f(z) = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 = \frac{2\alpha(1-\alpha)}{(1-z)^2},$$

obtenemos:

$$(1-|z|^2)^2 \cdot |\mathcal{S}f(z)| \leq 2\alpha(1-\alpha) \frac{(1-|z|^2)^2}{(1-|z|)^2} = 2\alpha(1-\alpha)(1+|z|)^2.$$

Lo anterior implica que:

$$\|\mathcal{S}f\| = \sup_{|z|<1} (1-|z|^2)^2 |\mathcal{S}f(z)| = 8\alpha(1-\alpha), \text{ para todo } \frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

Para el caso $0 \leq \alpha \leq 1/2$, tenemos que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$ ya que:

$$f'(z) = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)z\right)(1-z)}.$$

Luego de algunos cálculos obtenemos:

$$f''(z) = \frac{2}{1+2\alpha} \left[\frac{2\alpha + (1-2\alpha)z}{\left(1 + \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)z\right)^2 (1-z)^2} \right].$$

Analogamente a lo realizado, procedemos a obtener la pre Schwarziana:

$$\mathcal{P}f(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{2}{1+2\alpha} \left[\frac{2\alpha + (1-2\alpha)z}{\left(1 + \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)z\right)(1-z)} \right]. \quad (2.10)$$

De donde obtenemos que:

$$g(z) = 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1 + \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)z^2}{\left(1 + \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)z\right)(1-z)}.$$

Una representación útil de la expresión anterior permite comprobar que f es convexa de orden α :

$$\operatorname{Re}\{g(z)\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{z}{1-z}\right\} + \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{1 + \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)z}\right\}. \quad (2.11)$$

Para el sumando de la izquierda notemos que:

$$\frac{z}{1-z} = \frac{1}{1-z} - 1 \implies \operatorname{Re}\left\{\frac{z}{1-z}\right\} > \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}. \quad (2.12)$$

Para el sumando de la derecha de la expresión (2.11) sea $z = re^{i\theta}$ con $0 \leq r < 1$ y $\theta \in]-\pi, \pi]$. Entonces:

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)z} = \frac{1 + \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)r \cos(\theta) - i \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)r \sin(\theta)}{\left(1 + \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)r \cos(\theta)\right)^2 + \left(\left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)r \sin(\theta)\right)^2}.$$

Lo anterior implica que:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{1 + \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)z} \right\} = \frac{1 + \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)r \cos(\theta)}{1 + 2 \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)r \cos(\theta) + \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)^2 r^2}.$$

Notar que la expresión anterior se hace cada vez más pequeña a medida que $r \rightarrow 1^-$, con $\cos(\theta) = 1$, luego:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{1 + \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)z} \right\} &> \frac{1 + \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)}{1 + 2 \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right) + \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)^2} \\ &= \frac{1 + \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)}{\left(1 + \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)\right)^2} \\ &= \frac{1 + 2\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Entonces, de acuerdo a (2.12) y a lo realizado en el desarrollo anterior, tenemos que:

$$\operatorname{Re}\{g(z)\} > -\frac{1}{2} + \frac{1 + 2\alpha}{2} = \alpha.$$

Concluimos que $f(z)$ es convexa de orden α cuando $0 \leq \alpha \leq 1/2$. Para determinar la cota para la norma de la derivada Schwarziana, a partir de (2.10) obtenemos:

$$\left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)' = \frac{2 \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right) \left(1 + \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)z\right) (1-z) + 4 \left(\frac{2\alpha}{1+2\alpha} + \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)z\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)z\right)^2 (1-z)^2}.$$

Entonces la derivada Schwarziana está dada por:

$$\mathcal{S}f(z) = \frac{2}{\left[(1 + 2\alpha) \left(1 + \left(\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha}\right)z\right) (1-z)\right]^2} = \frac{2}{(1 + 2\alpha + (1 - 2\alpha)z)^2 (1-z)^2}.$$

De lo anterior se concluye que:

$$\begin{aligned} (1 - |z|^2)^2 \cdot |\mathcal{S}f(z)| &\leq 2 \left(\frac{1 - |z|^2}{(1 + 2\alpha + (1 - 2\alpha)|z|)(1 - |z|)} \right)^2 \\ &= 2 \left(\frac{1 + |z|}{1 + 2\alpha + (1 - 2\alpha)z} \right)^2 \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

Notar que si $0 \leq \alpha \leq 1/2$, entonces $1 - 2\alpha \geq 0$. Para la última desigualdad, tenemos que:

$$0 \leq 2\alpha(1 - |z|) \implies \frac{1 + |z|}{1 + 2\alpha + (1 - 2\alpha)|z|} \leq 1.$$

En consecuencia,

$$\|\mathcal{S}f\| = \sup_{|z|<1} (1 - |z|^2)^2 \cdot |\mathcal{S}f(z)| \leq 2, \text{ para todo } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}.$$

Del desarrollo anterior, concluimos que la función definida en (2.8) es convexa de orden α , además de satisfacer las cotas asociadas a la norma Schwarziana dadas por [Suiña \(1996\)](#). Esta función también posee las siguiente propiedades:

- si $\alpha = 0$ entonces obtenemos:

$$f(z) = \frac{1}{2} \text{Log} \left(\frac{1+z}{1-z} \right).$$

La cual maximiza la norma de la derivada Schwarziana dentro de las funciones convexas de orden 0, o simplemente convexas. Esta función está definida en (2.4) y su gráfico está dado en la Figura 2.1.

- Si $\alpha = 1/2$ entonces obtenemos:

$$f(z) = \text{Log} \left(\frac{1}{1-z} \right) = -\text{Log}(1-z). \quad (2.13)$$

En la Figura 2.2 se presenta la imagen del disco bajo la función dada en (2.13).

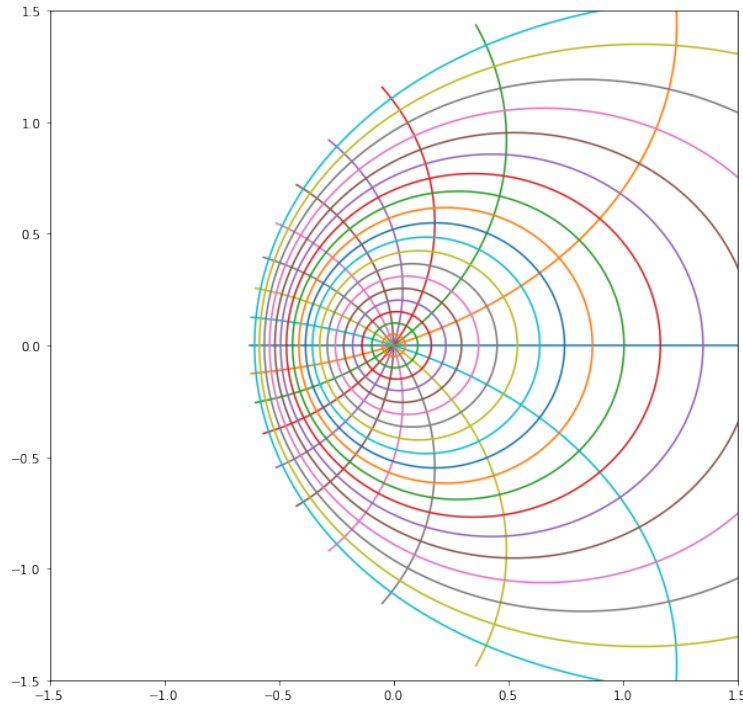


FIGURA 2.2: Imagen del disco asociada la función (2.13).

Por otro lado, si analizamos el comportamiento de $f(z)$ cuando $\alpha \rightarrow (1/2)^+$, obtenemos:

$$\lim_{\alpha \rightarrow (1/2)^+} f(z) = \lim_{\alpha \rightarrow (1/2)^+} \frac{(1-z)^{-(1-2\alpha)} - 1}{1-2\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow (1/2)^+} \frac{e^{-(1-2\alpha)\text{Log}(1-z)} - 1}{1-2\alpha}.$$

Aplicamos la regla de L'Hopital (derivando respecto de α) para obtener:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow (1/2)^+} \frac{2e^{-(1-2\alpha)\text{Log}(1-z)}\text{Log}(1-z)}{-2} &= -\text{Log}(1-z) \lim_{\alpha \rightarrow (1/2)^+} e^{-(1-2\alpha)\text{Log}(1-z)} \\ &= -\text{Log}(1-z). \end{aligned}$$

- Si definimos la sustitución $\beta = \frac{2\alpha}{1+2\alpha}$, entonces si $0 \leq \alpha \leq 1/2$ se tiene que $0 \leq \beta \leq 1/2$. Además,

$$\frac{1-2\alpha}{1+2\alpha} = 1-2\beta \quad \text{y} \quad \frac{1+2\alpha}{2} = \frac{1}{2(1-\beta)}.$$

Entonces, para $0 \leq \beta \leq 1/2$, podemos escribir:

$$f(z) = \frac{1}{2(1-\beta)} \text{Log} \left(\frac{1 + (1-2\beta)z}{1-z} \right).$$

Sin embargo, esta función es convexa de orden $\frac{\beta}{2(1-\beta)} < \beta$.

Capítulo 3

Objetivos y metodología

En este capítulo describimos las hipótesis asociadas a este trabajo además de entregar las metodologías de trabajo considerando en primer lugar el uso de un lema fundamental dentro del Análisis Complejo y en segundo lugar, el uso como complemento a la investigación del lenguaje de programación Python para obtener una visualización geométrica de las funciones y también como apoyo algebraico.

3.1. Definición de las hipótesis

La hipótesis principal de esta tesis es obtener, mediante el uso lema de Schwarz y alguna de sus generalizaciones, una cota para la norma de la Schwarziana:

$$\|\mathcal{S}f\| = \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^2 \cdot |\mathcal{S}f(z)|, \quad (3.1)$$

para la clase de funciones convexas de orden α con $f''(0) = 0$ y extender, de ser posible, algunos resultados y ejemplos análogos a los propuestos en [Chuaqui et al. \(2011\)](#) para estas sub clases.

Como objetivo secundario se propone obtener una cota similar a la obtenida por [Suita \(1996\)](#) pero mediante la aplicación de un resultado fundamental en análisis complejo, conocido como lema de Schwarz, de una forma análoga a como se aplica para las funciones de la clase C en [Chuaqui et al. \(2011\)](#). A continuación, enunciamos el lema de Schwarz:

Lema 1. Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en $\mathbb{D}$. Si $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ entonces:

$$|f(z)| \leq |z|, \text{ para todo } z \in \mathbb{D}.$$

Además $|f'(0)| \leq 1$. En el caso que $|f(z)| = |z|$ para algún $z \neq 0$ entonces $f(z)$ es una rotación del disco.

Un resultado importante asociado al lema de Schwarz es el lema de Schwarz-Pick y podemos interpretarlo como una generalización del Lema 1 para funciones analíticas de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$, donde no necesariamente es el origen el queda fijo por la función f :

Lema 2. Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una función analítica en $\mathbb{D}$. Entonces, para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ se tiene que:

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)}f(z_2)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}z_2} \right|.$$

Como consecuencia de lo anterior se tiene además que, para todo $z \in \mathbb{D}$:

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}.$$

En Boas (2010) se puede encontrar una reseña histórica del Lema 1 y del Lema 2, mientras que en Avkhadiev & Wirths (2009) se plantean distintos tipos de generalizaciones y desigualdades asociadas al lema de Schwarz.

Por otro lado, considerando que si $g(z) = 1 + zf''(z)/f'(z) \in P$, osea $g(0) = 1$ y $\operatorname{Re}\{g(z)\} > 0$, entonces podemos decir que g está subordinada a la transformación de Möbius

$$\ell(z) = \frac{1+z}{1-z} \text{ con } z \in \mathbb{D},$$

que envía el disco $\mathbb{D}$ de manera conforme al semiplano derecho $H = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\{w\} > 0\}$ (ver Figura 3.1), de acuerdo a la relación:

$$g(z) = 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = \ell(w(z)), \quad (3.2)$$

donde w es una función analítica de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$, con $w(0) = 0$ (denominada función de Schwarz).

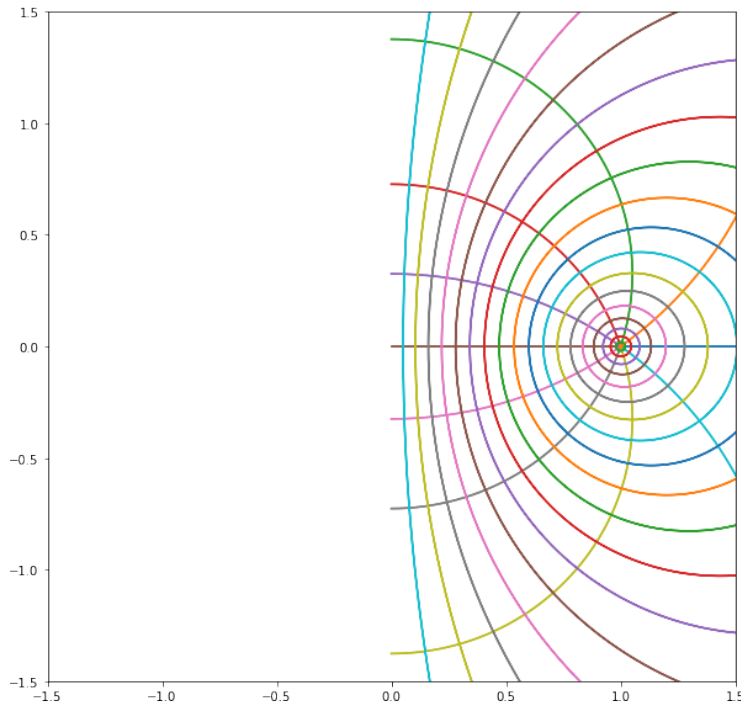


FIGURA 3.1: Imagen H del disco $\mathbb{D}$ asociada a la función $\ell(z)$.

Análogamente a lo descrito anteriormente y extendiendo la idea propuesta por Chuaqui et al. (2011), para $0 \leq \alpha < 1$ podemos considerar la siguiente transformación de Möbius:

$$\ell_\alpha(z) = \frac{1 + (1 - 2\alpha)z}{1 - z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

que envía el disco $\mathbb{D}$ de manera conforme al semiplano $H_\alpha = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\{w\} > \alpha\}$. La Figura 3.2 muestra la imagen del disco $\mathbb{D}$ asociada a la función $\ell_\alpha(z)$ para $\alpha = 1/2$.

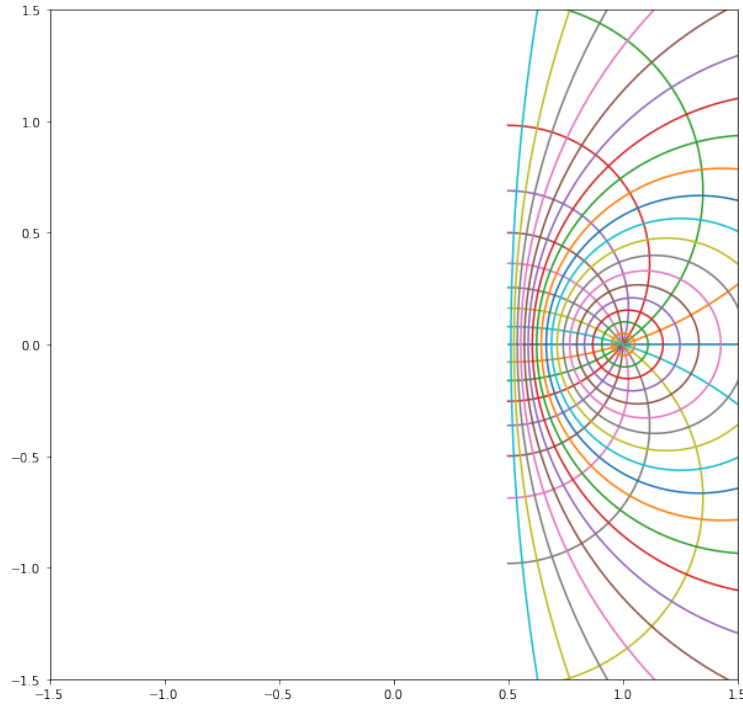


FIGURA 3.2: Imagen H_α del disco $\mathbb{D}$ asociada a la función $\ell_\alpha(z)$ con $\alpha = 1/2$.

Si consideramos que

$$g(z) = 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \in P,$$

tal que $\operatorname{Re}\{g(z)\} > \alpha$, entonces la función $\ell_\alpha^{-1} \circ g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ está bien definida, es analítica en $\mathbb{D}$ y además $(\ell_\alpha^{-1} \circ g)(0) = 0$ por lo que podemos decir que, para el caso de la clase de funciones convexas de orden α , g está subordinada a ℓ_α y por lo tanto:

$$g(z) = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = \ell_\alpha(w(z)) = \frac{1 + (1 - 2\alpha)w(z)}{1 - w(z)},$$

para alguna función $w : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, analítica en $\mathbb{D}$ y $w(0) = 0$. Si definimos la función $\varphi(z) = w(z)/z$ para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces de (3.1) obtenemos la expresión para la pre Schwarziana de f :

$$\mathcal{P}f(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = 2(1 - \alpha) \left(\frac{\varphi(z)}{1 - z\varphi(z)} \right). \quad (3.3)$$

Notemos que las expresiones $\varphi(z)$ y $f''(z)/f'(z)$ están bien definidas para $z = 0$, considerando que $w(0) = 0$ y que $f'(0) = 1$ ya que $f \in S$. Como consecuencia de lo anterior, obtenemos que la derivada Schwarziana asociada a una función f en la clase C_α cumple:

$$\mathcal{S}f(z) = 2(1 - \alpha) \left(\frac{\varphi'(z) + \alpha \cdot \varphi^2(z)}{(1 - z\varphi(z))^2} \right), \quad (3.4)$$

para todo $0 \leq \alpha < 1$. Dado que $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, además de ser analítica en $\mathbb{D}$, tenemos que se cumple:

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{1 - |z|^2}, \quad (3.5)$$

de acuerdo al lema de Schwarz-Pick (2). Luego, de (3.4) y (3.5) junto con la desigualdad triangular, se tiene:

$$(1 - |z|^2)^2 \cdot |\mathcal{S}f(z)| \leq 2(1 - \alpha) \left[\frac{(1 - |\varphi(z)|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - z\varphi(z)|^2} + \alpha \left(\frac{|\varphi(z)|(1 - |z|^2)}{|1 - z\varphi(z)|} \right)^2 \right].$$

Esta última relación será clave para desarrollar el objetivo planteado en esta tesis.

3.2. Uso de Python

En este trabajo nos apoyaremos con el lenguaje de programación Python, junto con las librerías matplotlib, sympy, numpy, entre otras, para graficar y trabajar con expresiones algebraicas a modo de apoyar visualmente, además de complementar y corroborar los resultados y enunciados propuestos. En particular, se programaron distintos tipos de funciones que permitieron:

- Visualizar geoméricamente la imagen del disco $\mathbb{D}$ bajo algunas de las funciones definidas en este trabajo, en particular para visualizar la parte real de la función:

$$g(z) = 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)},$$

y también para obtener una representación geométrica de la imagen del disco $\mathbb{D}$ bajo las distintas funciones que se presentan en este trabajo. Las figuras presentadas en esta tesis corresponden al desarrollo de este inciso.

- Corroborar algunos cálculos algebraicos extensos que se proponen en este trabajo. Fue muy importante poder validar algunos cálculos asociados a la pre Schwarziana, a la derivada Schwarziana y la función definida en (3.2). Cabe señalar que todos los cálculos fueron realizados de manera formal y que los programas desarrollados para el trabajo algebraico permitieron solo corroborar lo realizado.
- Investigar de manera general una función convexa de orden α y aproximar su orden mediante procesos de optimización programados dentro de la librería scipy. Lo propuesto en Python para esta parte permite tener una idea general respecto del comportamiento de la función y las demostraciones se realizaron de manera formal dentro del desarrollo de este trabajo.

En el Apéndice A se presentan los códigos que se programaron como apoyo a la investigación junto con la descripción general de éstos.

Capítulo 4

Resultados

En esta sección proponemos y demostramos los resultados asociados a esta tesis. El primer resultado, de este trabajo, entrega una cota precisa para la norma Schwarziana asociada a las funciones convexas de orden α con la condición que la segunda derivada en el origen sea igual a cero. Posteriormente presentamos una función (en términos de una expresión integral) que maximiza la norma de la Schwarziana para esta clase de funciones junto con ejemplos relevantes para los casos $\alpha = 0$ y $\alpha = 1/2$. Como resultado secundario, quitamos la condición sobre la segunda derivada en el origen para obtener una desigualdad asociada a la norma Schwarziana, la cual en general no es precisa considerando aquella obtenida por [Suiña \(1996\)](#), pero que en algunos casos puntuales asociados al módulo de la segunda derivada en el origen es mejor.

4.1. Funciones convexas de orden alfa con $f''(0)=0$

Sea f una función convexa de orden α . Diremos que f pertenece a la clase C_α^0 si $f''(0) = 0$. El primer resultado de este trabajo muestra una cota precisa de la norma Schwarziana asociada a las funciones de la clase C_α^0 :

Teorema 1. Si $f \in C_\alpha^0$ entonces

$$(1 - |z|^2)^2 \cdot |Sf(z)| \leq 2(1 - \alpha^2), \text{ para todo } 0 \leq \alpha < 1.$$

Demostración. Dado que si $f \in C_\alpha^0$ entonces f es una función en la clase C , de acuerdo a (3.4) y a la desigualdad triangular, tenemos que:

$$|Sf(z)| \leq 2(1 - \alpha) \left[\frac{|\varphi'(z)| + \alpha|\varphi(z)|^2}{|1 - z\varphi(z)|^2} \right].$$

Como consecuencia de lo anterior, se tiene:

$$(1 - |z|^2)^2 \cdot |Sf(z)| \leq 2(1 - \alpha) \cdot \frac{(1 - |z|^2)^2}{|1 - z\varphi(z)|^2} [|\varphi'(z)| + \alpha|\varphi(z)|^2] \quad (4.1)$$

$$\leq 2(1 - \alpha) \cdot \frac{(1 - |z|^2)^2}{|1 - z\varphi(z)|^2} \left[\frac{1 - |\varphi(z)|^2}{1 - |z|^2} + \alpha|\varphi(z)|^2 \right]. \quad (4.2)$$

La última desigualdad se obtiene al aplicar el Lema 2 a $|\varphi'(z)|$ considerando que φ es analítica en $\mathbb{D}$. Por otro lado, definamos la función Φ como:

$$\Phi(z) = \frac{\bar{z} - \varphi(z)}{1 - z\varphi(z)}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Notemos que $|\Phi(z)|^2 < 1$ ya que $|z| < 1$ y $|\varphi(z)| < 1$, y por lo tanto:

$$(1 - |z|^2)(1 - |\varphi(z)|^2) > 0 \implies |\bar{z} - \varphi(z)|^2 < |1 - z\varphi(z)|^2.$$

Luego,

$$1 - |\Phi(z)|^2 = \frac{(1 - |\varphi(z)|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - z\varphi(z)|^2},$$

O bien,

$$\frac{(1 - |z|^2)^2}{|1 - z\varphi(z)|^2} = \frac{(1 - |\Phi(z)|^2)(1 - |z|^2)}{(1 - |\varphi(z)|^2)}.$$

Reemplazando esta última expresión en (4.1) se sigue que:

$$(1 - |z|^2)^2 \cdot |Sf(z)| \leq 2(1 - \alpha)(1 - |\Phi(z)|^2) \left[1 + \alpha \left(\frac{|\varphi(z)|^2(1 - |z|^2)}{1 - |\varphi(z)|^2} \right) \right]. \quad (4.3)$$

Considerando la expresión dada en (3.3) para la pre Schwarziana de f y además que $f'(0) = 1$ ya que $f \in C_\alpha \subset S$, obtenemos:

$$\frac{f''(0)}{f'(0)} = 2(1 - \alpha) \left(\frac{\varphi(0)}{1 - 0 \cdot \varphi(0)} \right) \iff f''(0) = 2(1 - \alpha)\varphi(0). \quad (4.4)$$

Ya que $f \in C_\alpha^0$ tenemos que $f''(0) = 0$ y por lo tanto $\varphi(0) = 0$. Como φ está definida en el disco, es analítica y $\varphi(0) = 0$, por el lema de Schwarz (Lema 1) obtenemos:

$$|\varphi(z)| \leq |z|, \text{ para todo } z \in \mathbb{D}. \quad (4.5)$$

Como consecuencia de lo anterior tenemos que:

$$\frac{|\varphi(z)|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} \leq \frac{|z|^2}{1 - |z|^2}, \text{ para todo } z \in \mathbb{D}. \quad (4.6)$$

Sustituyendo (4.6) en (4.3) tenemos que:

$$(1 - |z|^2)^2 \cdot |Sf(z)| \leq 2(1 - \alpha)(1 - |\Phi(z)|^2)(1 + \alpha|z|^2).$$

Ya que $1 - |\Phi(z)|^2 < 1$ considerando que $|\Phi(z)| < 1$ para todo $|z| < 1$, podemos concluir que:

$$(1 - |z|^2)^2 \cdot |Sf(z)| \leq 2(1 - \alpha)(1 + \alpha) = 2(1 - \alpha^2).$$

■

Del resultado anterior, podemos notar que una cota precisa de la norma de la derivada Schwarziana cuando $f \in C_\alpha^0$ es:

$$\|Sf\| = \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^2 \cdot |Sf(z)| = 2(1 - \alpha^2).$$

En el contexto de las funciones convexas de orden α , tenemos que si $f \in C_\alpha^0$ y $w(z) = z^2$, entonces se cumple que:

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{1 + (1 - 2\alpha)z^2}{1 - z^2} \implies \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{2(1 - \alpha)z}{1 - z^2}, \text{ para todo } z \in \mathbb{D}.$$

Por otro lado,

$$(\text{Log}(f'(z)))' = \frac{f''(z)}{f'(z)} \quad \text{y} \quad \left(\text{Log} \left(\frac{1}{1-z^2} \right) \right)' = \frac{2z}{1-z^2}.$$

De lo anterior, se tiene que:

$$f'(z) = \left(\frac{1}{1-z^2} \right)^{1-\alpha} \Rightarrow f(z) = \int_0^z \left(\frac{1}{1-w^2} \right)^{1-\alpha} dw. \quad (4.7)$$

Es importante notar que cuando $\alpha = 0$ entonces:

$$f(z) = \int_0^z \frac{1}{1-w^2} dw = \frac{1}{2} \text{Log} \left(\frac{1+z}{1-z} \right),$$

la cual maximiza la norma de la derivada Schwarziana en las funciones convexas (o convexas de orden 0). Además, si evaluamos por $\alpha = 1/2$ en (4.7) entonces obtenemos la función:

$$f(z) = \int_0^z \frac{1}{(1-w^2)^{1/2}} dw = \arcsen(z), \quad (4.8)$$

donde $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $f''(0) = 0$. Entonces, la función $\arcsen(z)$ es una función convexa de orden $1/2$ y además maximiza la norma Schwarziana en la clase $C_{1/2}^0$. En la Figura 4.1 se muestra la imagen del disco dado en la Figura 1.1 bajo la función dada en (4.8), mientras que en la Figura 4.2 se muestra la imagen asociada al disco de la función $1 + z \cdot f''(z)/f'(z)$ donde $f(z)$ es la función dada en (4.8).

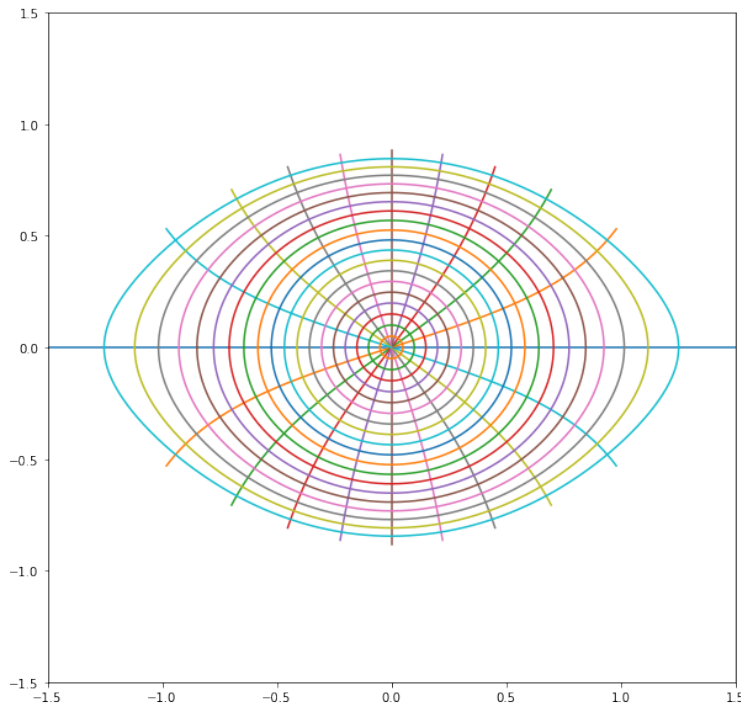


FIGURA 4.1: Imagen del disco $\mathbb{D}$ asociada a la función $f(z) = \arcsen(z)$.

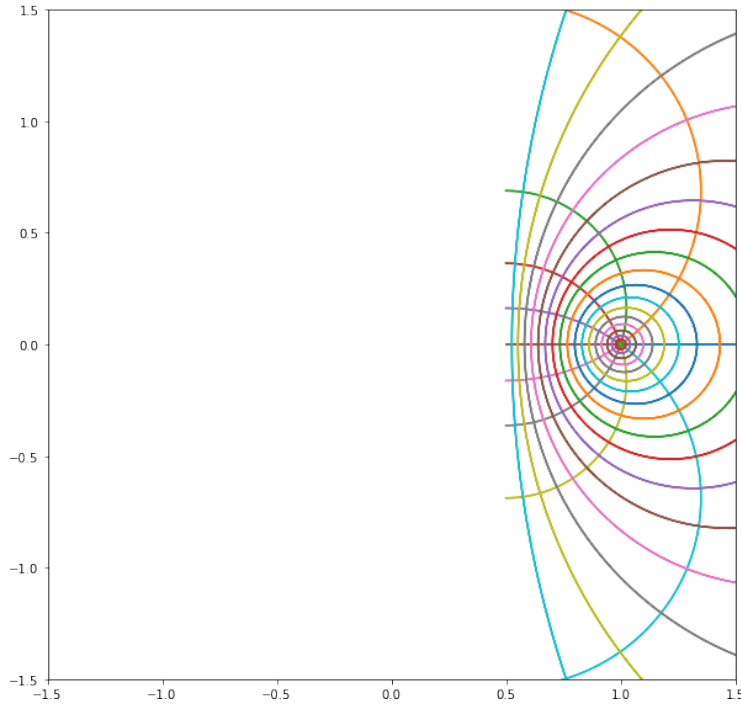


FIGURA 4.2: Imagen del disco $\mathbb{D}$ asociada a $1 + z \cdot f''(z)/f'(z)$ con $f(z) = \arcsen(z)$.

Complementando lo anterior, presentamos una desigualdad importante asociada a las funciones de la clase C_α^0 . En [Chuaqui et al. \(2011\)](#), para la clase de funciones convexas se obtiene la desigualdad:

$$(1 - |z|^2)^2 \cdot |\mathcal{S}f(z)| + 2 \left| \frac{\varphi(z) - \bar{z}}{1 - z\varphi(z)} \right|^2 \leq 2, \quad (4.9)$$

la cual es una consecuencia directa de (3.5), con $|\varphi(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $f \in C$. Esta desigualdad es estricta para todo $z \in \mathbb{D}$ mientras que φ sea una rotación o una transformación de Möbius de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$. Esta desigualdad permite entender qué tan lejos está la expresión $(1 - |z|^2)^2 |\mathcal{S}f(z)|$ de la cota asociada a la norma de la derivada Schwarziana y en este caso en particular, notamos que ella depende de la función φ que se considere.

Para el caso de la clase C_α^0 obtenemos una desigualdad análoga a (4.9), considerando en nuestro caso que $\varphi(z) := z\varphi(z)$:

$$(1 - |z|^2)^2 |\mathcal{S}f(z)| \leq 2(1 - \alpha) \left[(1 + \alpha) - \left| \frac{z\varphi(z) - \bar{z}}{1 - z^2\varphi(z)} \right|^2 - \alpha \left(1 - \left(\frac{(1 - |z|^2)|z\varphi(z)|}{|1 - z^2\varphi(z)|} \right)^2 \right) \right].$$

De la desigualdad anterior, obtenemos:

$$(1 - |z|^2)^2 \cdot |\mathcal{S}f(z)| + 2(1 - \alpha) \left| \frac{z\varphi(z) - \bar{z}}{1 - z^2\varphi(z)} \right|^2 \leq 2(1 - \alpha^2).$$

4.2. Funciones convexas de orden alfa

En esta sección presentamos dos resultados asociados a la norma Schwarziana en la clase de funciones convexas de orden α , donde no necesariamente $f''(0) = 0$. El siguiente lema será útil para demostrar el Teorema 2.

Lema 3. Sea φ una función analítica definida en $\mathbb{D}$ tal que $|\varphi(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Entonces:

$$|\varphi(z)| \leq \frac{|\varphi(0)| + |z|}{1 + |\varphi(0)| \cdot |z|}.$$

Observación: El lema anterior se puede considerar como un caso especial del lema de Schwarz para funciones acotadas y su demostración está disponible en [Nehari \(2012\)](#).

El siguiente teorema presenta otro resultado asociado a la clase más general de funciones convexas de orden α . El resultado propone una cota para la derivada Schwarziana de acuerdo al valor de $f''(0)$ cuando $f \in C_\alpha$.

Teorema 2. Sea f una función convexa de orden α , con $0 \leq \alpha < 1$. Si $p = (2(1 - \alpha))^{-1}|f''(0)|$, entonces:

$$(1 - |z|^2)^2 \cdot |Sf(z)| \leq 2(1 - \alpha) \left(1 + \alpha \cdot \left(\frac{1 + p}{1 - p} \right) \right),$$

para todo $0 \leq \alpha < 1$.

Demostración. A partir de lo realizado en la demostración del Teorema 1, si consideramos la expresión dada en (4.4) entonces tenemos que $p = |\varphi(0)|$, por lo que de acuerdo al Lema 3 se tiene que:

$$\frac{|\varphi(z)|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} \leq \frac{(p + |z|)^2}{(1 + p|z|)^2 - (p + |z|)^2} = \frac{(p + |z|)^2}{(1 - p^2)(1 - |z|^2)}.$$

Al evaluar en la expresión (4.3) en la demostración del Teorema 1 se concluye que:

$$(1 - |z|^2)^2 \cdot |Sf(z)| \leq 2(1 - \alpha)(1 - |\Phi(z)|^2) \left(1 + \alpha \cdot \frac{(p + |z|)^2}{1 - p^2} \right).$$

Teniendo en cuenta que $1 - |\Phi(z)|^2 < 1$ para todo $|z| < 1$, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} (1 - |z|^2)^2 \cdot |Sf(z)| &\leq 2(1 - \alpha) \left(1 + \alpha \cdot \frac{(p + 1)^2}{1 - p^2} \right) \\ &= 2(1 - \alpha) \left(1 + \alpha \cdot \frac{1 + p}{1 - p} \right). \end{aligned}$$

■

Observación: La diferencia del resultado obtenido por [Suito \(1996\)](#) respecto del entregado en el Teorema 2 de este trabajo, consiste en la utilización del lema de Schwarz y de Schwarz-Pick en vez de la representación de Herglotz para funciones en la clase P . Aún cuando la desigualdad no es precisa, los siguientes teoremas indican

las condiciones asociadas al valor de $f''(0)$ de modo que la cota obtenida en este trabajo sea menor o igual que aquella obtenida por Suita para las funciones convexas de orden α .

Teorema 3. Sea f una función convexa de orden α . Para $0 \leq \alpha \leq 1/2$, si

$$|f''(0)| \leq \frac{2\alpha(1-\alpha)}{2-\alpha} \quad \text{y} \quad p = \frac{|f''(0)|}{2(1-\alpha)},$$

entonces:

$$2(1-\alpha) \left(1 + \alpha \cdot \frac{1+p}{1-p} \right) \leq 2.$$

Mientras que para $1/2 < \alpha < 1$, si

$$|f''(0)| \leq \frac{2(1-\alpha)(3\alpha-1)}{5\alpha-1} \quad \text{y} \quad p = \frac{|f''(0)|}{2(1-\alpha)},$$

entonces:

$$2(1-\alpha) \left(1 + \alpha \cdot \frac{1+p}{1-p} \right) \leq 8\alpha(1-\alpha).$$

Demostración. Supongamos que $0 \leq \alpha \leq 1/2$, por lo que de acuerdo al enunciado,

$$|f''(0)| \leq \frac{2\alpha(1-\alpha)}{2-\alpha} \iff p \leq \frac{\alpha}{2-\alpha}.$$

Entonces, tenemos que:

$$1+p \leq \frac{2}{2-\alpha} \quad \text{y} \quad 1-p \geq \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha}.$$

Lo anterior implica que:

$$\frac{1+p}{1-p} \leq \frac{1}{1-\alpha}.$$

Luego,

$$2(1-\alpha) \left(1 + \alpha \cdot \frac{1+p}{1-p} \right) \leq 2(1-\alpha) \left(1 + \alpha \cdot \frac{1}{1-\alpha} \right) = 2. \quad (4.10)$$

Por otro lado, si suponemos que $1/2 < \alpha < 1$ tenemos, de forma análoga a lo realizado anteriormente, que:

$$|f''(0)| \leq \frac{2(1-\alpha)(3\alpha-1)}{5\alpha-1} \iff p \leq \frac{3\alpha-1}{5\alpha-1}.$$

A partir de lo anterior, obtenemos que:

$$1+p \leq \frac{2\alpha-2}{5\alpha-1} \quad \text{y} \quad 1-p \geq \frac{2\alpha}{5\alpha-1}.$$

Y por lo tanto,

$$\frac{1+p}{1-p} \leq \frac{4\alpha-1}{\alpha}.$$

Evaluando, se tiene que:

$$2(1 - \alpha) \left(1 + \alpha \cdot \frac{1+p}{1-p} \right) \leq 2(1 - \alpha) \left(1 + \alpha \cdot \frac{4\alpha - 1}{\alpha} \right) = 8\alpha(1 - \alpha). \quad (4.11)$$

■

Observación: El Teorema 3 junto con las desigualdades (4.10) y (4.11) permiten obtener una cota mejor o más precisa que aquella obtenida por [Suiña \(1996\)](#), siempre que $|f''(0)|$ esté dentro de un rango apropiado de valores, que a su vez dependen del valor de α asociado al orden de convexidad de la función f . Cuando $0 \leq \alpha \leq 1/2$ y $1/2 < \alpha < 1$ tenemos, respectivamente, que:

$$(1 - |z|^2)^2 \cdot |\mathcal{S}f(z)| \leq 2 \quad \text{y} \quad (1 - |z|^2)^2 \cdot |\mathcal{S}f(z)| \leq 8\alpha(1 - \alpha).$$

Por otro lado, es importante mencionar que:

$$0 \leq \frac{2\alpha(1 - \alpha)}{2 - \alpha} \leq \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad 0 < \frac{2(1 - \alpha)(3\alpha - 1)}{5\alpha - 1} \leq \frac{28 - 8\sqrt{6}}{25} \approx 0,33616,$$

cuando $0 \leq \alpha \leq 1/2$ y $1/2 < \alpha < 1$, respectivamente. El valor máximo se obtiene cuando

$$\alpha = \frac{3 + 2\sqrt{6}}{15} \approx 0,526.$$

Capítulo 5

Conclusiones

En este capítulo se entregan las conclusiones del trabajo desarrollado en esta tesis y posterior trabajo a futuro para extender las ideas y resultados presentados.

5.1. Conclusiones generales

A continuación se describen algunas conclusiones generales que se desprenden del trabajo realizado:

- Las hipótesis propuestas fueron aplicadas durante la investigación de manera satisfactoria y se logró obtener un resultado aplicando el lema de Schwarz para obtener una cota para la norma Schwarziana para funciones convexas de orden α , considerando la hipótesis adicional $f''(0) = 0$.
- Aún cuando no se pudo generalizar la cota obtenida por [Suito \(1996\)](#) mediante la aplicación del lema de Schwarz para funciones no normalizadas (no necesariamente $f''(0) = 0$) si se obtuvo una cota mejor para un caso más restringido asociado al orden de convexidad y al valor del módulo de la segunda derivada de f en cero. De acuerdo a los cálculos realizados esto último se cumple cuando el valor de $|f''(0)|$ es relativamente pequeño.
- Es importante mencionar que el uso del lenguaje de programación Python, aprendido durante la realización de este magíster, fue muy relevante en el proceso de investigación permitiendo visualizar y corroborar algunos de los extensos cálculos que se debieron realizar en algunos casos.

5.2. Trabajo posterior

Se proponen algunas ideas generales de trabajo posterior asociado al desarrollo de esta tesis y metodología aplicada.

- Se intentará extender el uso del lema de Schwarz para otras clases de funciones y obtener una relación que permita obtener una cota para la derivada Schwarziana en estas clases.
- Buscar ejemplos en estas clases de funciones, en particular aquellos que se presenten como ejemplos maximales asociados a la norma Schwarziana, además de preguntarse respecto de su unicidad.
- Obtener una mejor cota asociada a la derivada Schwarziana respecto de aquella que se propone en este trabajo para funciones convexas de orden α (Teorema 2).

- Aplicar herramientas de programación como metodología real para la investigación y que permita abordar ideas y razonamientos de manera visual además de numérica, permitiendo optimizar el proceso de investigación en algunos casos.

Apéndice A

Códigos implementados

A.1. Desarrollo algebraico

El siguiente código permite obtener la pre Schwarziana, la expresión $1 + z \cdot f''(z) / f'(z)$ y la derivada Schwarziana asociada a alguna función $f(z)$. Dentro del código se proponen algunas funciones interesantes y que están presentes en el desarrollo de este trabajo.

```

1  # Verificación de desarrollo algebraico
2
3  # Importación de librerías
4  import sympy as sp
5
6  # Visualización de ecuaciones
7  from IPython.display import display, Math
8
9  # Definimos símbolos asociados a la variable compleja z
10 # y al parametro a
11
12 z = sp.Symbol('z')
13 a = sp.Symbol('a')
14
15 # Algunas funciones de ejemplo
16 # Descomentar para activar y definir en términos de z
17
18 f = 0.5 * sp.log((1.0 + z) / (1.0 - z))
19
20 # f = sp.log(1.0 / (1.0 - z))
21
22 f = (((1.0 + 2.0 * a) / 2.0) *
23      sp.log((1.0 + ((1.0 - 2.0 * a) /
24                  (1.0 + 2.0*a)) * z) /
25            (1.0 - z)))
26
27 # f = ((1.0 - z)**(-(1 - 2.0 * a)) - 1.0) / (1.0 - 2.0 * a)
28
29 # f = sp.asin(z)
30
31 # f = z / (1 - z)**2 # Funci\on de Koebe
32
33
34 # Obtenemos la pre Schwarziana de f
35 pSf = sp.simplify(f.diff(z,2) / f.diff(z))
36

```

```

37 print('La pre Schwarziana de f es:')
38 display(pSf)
39
40 # Obtenemos la expresión  $p = 1 + z * f''(z) / f'(z)$ 
41 # en la clase P
42
43 p = 1 + z * pSf
44
45 print('La función en la clase de Caratheódory de f es:')
46 display(sp.simplify(p))
47
48 # Obtenemos la derivada Schwarziana
49
50 Sf = pSf.diff(z) - (1/2) * (pSf)**2
51
52 print('La derivada Schwarziana de f es:')
53 display(sp.simplify(Sf))

```

A.2. Visualización en el plano complejo

El siguiente código permite obtener la imagen del disco $\mathbb{D}$ bajo la función $f(z)$. En el código se proponen algunas funciones relevantes y que están presentes en el desarrollo de esta tesis.

```

1 # Visualización geométrica en el plano complejo
2
3 # Importación de librerías
4 import numpy as np
5 import cmath
6 import matplotlib.pyplot as plt
7
8 # Se define valor para el parámetro a
9
10 a = 0.5
11
12 # Algunas funciones de ejemplo
13 # Descomentar para activar. Definir en términos de z y a
14
15 # f = lambda z: z # Función identidad
16
17 # f = lambda z: z / (1 - z)**2 # Función de Koebe
18
19 # f = lambda z: 0.5 * (z / (1.0 - z)**2.0 + z /
20 #                     (1.0 + z)**2.0) # Función no univalente
21
22 f = lambda z: 0.5 * cmath.log((1 + z) /
23                             (1 - z)) # Franja horizontal
24
25 # f = lambda z: (((1.0 + 2 * a) / 2) *
26 #               sp.log((1 + ((1 - 2 * a) /
27 #               (1 + 2 * a)) * z) /
28 #               (1 - z)))
29
30 f = lambda z: ((1.0 - z)**(-(1.0 - 2.0 * a)) /
31               (1.0 - 2.0 * a))
32

```

```

33 # f = lambda z: (1 + z) / (1 - z)
34
35 # f = lambda z: z / (1 - z**2)
36
37 # f = lambda z: 1 / (1 - z**2)
38
39 # f = lambda z: 1 / (1 - z))
40
41 # f = lambda z: (1 + (1 - 2 * a) * z) / (1 - z)
42
43 # f = lambda z: (1 + ((1 - 2 * a) / (1 + 2*a)) * z) / (1 - z)
44
45 # f = lambda z: (1 + z**2) / (1 - z**2)
46
47 # f = lambda z: cmath.log(1.0 / (1.0 - z))
48
49 # f = lambda z: cmath.asin(z)
50
51 # f = lambda z: (1 + (1-2 * alpha) * z**2) / (1 - z**2)
52
53 # f = lambda z: ((1 + (1 - 2 * alpha) * z**2) / (1 - z**2))
54
55 # Definimos tamaño de imagen
56 ancho, largo = 10, 10
57 plt.figure(figsize=(ancho, largo))
58
59 # Definimos número de rayos y circunferencias
60 c_rayo, c_circ = 20, 20
61
62 # Generamos rayos parametrizados que parten desde el origen
63 for u in np.linspace(-np.pi,
64                      np.pi,
65                      num=c_rayo,
66                      endpoint=False):
67
68     # Lista que contiene la imagen de cada rayo parametrizado
69     rayo = [f(t * (np.cos(u) + 1j*np.sin(u))) for t in
70            np.linspace(0, 1, num=1000)]
71     # Obtenemos la parte real e imaginaria de cada elemento
72     # de la lista rayo
73     rayo_real = [r.real for r in rayo]
74     rayo_imag = [r.imag for r in rayo]
75     # Graficamos la imagen de cada rayo en el plano
76     plt.plot(rayo_real, rayo_imag)
77
78 for r in np.linspace(0,
79                     1,
80                     num=c_circ,
81                     endpoint=False):
82
83     # Lista que contiene la imagen de cada cada
84     # circunferencia parametrizada
85     circ = [f(r * (np.cos(t) + 1j * np.sin(t))) for t in
86            np.linspace(-np.pi, np.pi, num=1000)]
87     # Obtenemos la parte real e imaginaria de cada
88     # elemento de la lista circ
89     circ_real = [c.real for c in circ]

```

```

90     circ_imagi = [c.imag for c in circ]
91     # Graficamos la imagen de cada circunferencia en el plano
92     plt.plot(circ_real, circ_imagi)
93
94
95     # Definimos centro de la imagen
96     h, k = 0, 0
97     # Definimos ancho y largo desde el centro de la imagen
98     r_h, r_k = 1.5, 1.5
99
100    plt.xlim(h - r_h, h + r_h)
101    plt.ylim(k - r_k, k + r_k)
102    plt.show()

```

A.3. Aproximación del orden de convexidad de una función convexa

El siguiente código permite obtener una aproximación del orden de convexidad de la función convexa $f(z)$. En el código se proponen algunas funciones convexas de orden α que están presentes en el desarrollo de este trabajo para la correcta verificación del código.

```

1  # Aproximacion al orden de convexidad de una funcion convexa
2
3  # Importación de librerías
4  import numpy as np
5  import sympy as sp
6  from sympy.utilities.lambdify import lambdify
7  from sympy.utilities.lambdify import implemented_function
8  from scipy.optimize import minimize
9
10 # Definimos el símbolo asociado al número complejo z
11 z = sp.symbols('z')
12
13 # Algunas funciones convexas de ejemplo
14 # Descomentar para activar. Definir en términos de z y a.
15
16 # f = ((1.0 + 2 * a) / 2) * sp.log((1 + ((1 - 2 * a) /
17 #                                     (1 + 2 * a)) * z) /
18 #                                     (1 - z))
19
20 # f = ((1.0 - z)**(2.0 * a - 1) - 1.0) / (1.0 - 2.0 * a)
21
22 f = 0.5 * sp.log((1.0 + z) / (1.0 - z))
23
24 # f = sp.log(1 / (1 - z))
25
26 # f = sp.asin(z)
27
28 # Definimos la parte real e imaginaria como símbolos
29 # asociado a variables reales
30 x, y = sp.symbols('x y', real = True)
31
32 # Definimos el complejo w con parte real x e imaginaria y
33 w = x + 1j * y
34

```

```

35 # Definimos el símbolo a (algunas funciones están
36 # parametrizadas por a)
37 a = sp.symbols('a')
38
39 # Se define el valor que asumirá el parámetro a
40 # Definir como np.NaN si la función no tiene parámetro a
41 # aa = 0.8
42 aa = np.NaN
43
44
45 # El condicional analiza el caso cuando escribimos una función
46 # respecto del parámetro a
47 if np.isnan(aa) == False:
48
49     # Definimos como función lambda a la expresión
50     #  $1 + zf''(z)/f'(z)$  en términos del parámetro a
51     reg_a = sp.lambdify(a, sp.simplify(1 + z * f.diff(z,2)
52                                     / f.diff(z)))
53
54     # Definimos como función lambda a la expresión
55     #  $1 + zf''(z)/f'(z)$  en términos de z y evaluamos la
56     # función anterior en el valor concreto de a
57     g = sp.lambdify(z, reg_a(aa))
58     # Extraemos solo la parte real de la función anterior en
59     # términos de las variables reales x e y
60     reg = sp.lambdify([x,y],
61                       sp.simplify(
62                           sp.re(sp.simplify(sp.expand(g(w))
63                                              ))))
64
65 else:
66
67     # Definimos como función lambda a la expresión
68     #  $1 + zf''(z)/f'(z)$  en términos de z
69     g = sp.lambdify(z, sp.simplify(1 +
70                                     z * f.diff(z,2) /
71                                     f.diff(z)))
72
73     # Extraemos solo la parte real de la función anterior
74     # en términos de las variables reales x e y
75     reg = sp.lambdify([x,y],
76                       sp.simplify(
77                           sp.re(sp.simplify(sp.expand(g(w))
78                                              ))))
79
80
81 # Definimos un radio menor a uno para restringir al
82 # círculo  $|z| \leq R$ 
83 R = 0.9999999
84
85
86 # Se define la función objetivo asociando las variables
87 # r y t con el radio vector y argumento en forma polar
88 def funcion_objetivo(p):
89     r = p[0]
90     t = p[1]
91     return reg(r * np.cos(t), r * np.sin(t))
92
93
94 # Se definen las variaciones asociadas al círculo  $|z| \leq R$ 
95 variacion_r = (0, R)
96 variacion_t = (0, 2 * np.pi)
97 variaciones = [variacion_r, variacion_t]

```

```
92 |
93 | # Aproximación inicial para las variables r y t
94 | p0 = [R, 0]
95 |
96 | # Se emplea método minimize de scipy considerando
97 | # que el método aplicado permite restricciones
98 | result = minimize(funcion_objetivo,
99 |                  p0,
100 |                  method = 'L-BFGS-B',
101 |                  bounds = variaciones
102 |                  )
103 |
104 | # Se entrega una aproximación del orden de
105 | # convexidad de la función
106 | print('La función es convexa de orden (aproximadamente): ',
107 |       result.fun)
```

Bibliografía

- Avkhadiev, F. G. & Wirths, K.-J. (2009), *Schwarz-Pick type inequalities*, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel.
URL: <https://doi-org.uai.idm.oclc.org/10.1007/978-3-0346-0000-2>
- Bieberbach, L. (1916), *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, Preussische Akademie der Wissenschaften Berlin: Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Reimer in Komm.
URL: <https://books.google.cl/books?id=7OuNPgAACAAJ>
- Boas, H. P. (2010), 'Julius and julia: Mastering the art of the schwarz lemma', *American Mathematical Monthly* **117**(9), 770 – 785.
- Carathéodory, C. (n.d.), 'Über den variabilitätsbereich der fourier'schen konstanten von positiven harmonischen funktionen', *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (1884-1940) **32**, 193–217.
- Chuaqui, M., Duren, P. & Osgood, B. (2011), 'Schwarzian derivatives of convex mappings', *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **36**(2), 449–460.
URL: <https://doi-org.uai.idm.oclc.org/10.5186/aasfm.2011.3628>
- de Branges, L. (1985), 'A proof of the Bieberbach conjecture', *Acta Math.* **154**(1-2), 137–152.
URL: <https://doi-org.uai.idm.oclc.org/10.1007/BF02392821>
- Duren, P. L. (1983), *Univalent functions*, Vol. 259 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*, Springer-Verlag, New York.
- Graham, I. & Kohr, G. (2003), *Geometric function theory in one and higher dimensions*, Vol. 255 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, Marcel Dekker, Inc., New York.
URL: <https://doi-org.uai.idm.oclc.org/10.1201/9780203911624>
- Herglotz, G. (1991), *Über potenzreihen mit positivem, reellen teil im einheitskreis*.
- Kraus, W. (1932), *Über den Zusammenhang einiger Charakteristiken eines einfach zusammenhängenden Bereiches mit der Kreisabbildung*, number n.º 21-23 in 'Mitteilungen aus dem Mathematischen Seminar Gießen', Math. Seminar.
URL: https://books.google.cl/books?id=T9_uAAAAMAAJ
- Muir, Jr., J. R. (2015), *Complex analysis*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ. A modern first course in function theory.
- Nehari, Z. (1949), 'The Schwarzian derivative and schlicht functions', *Bull. Amer. Math. Soc.* **55**, 545–551.
URL: <https://doi-org.uai.idm.oclc.org/10.1090/S0002-9904-1949-09241-8>

- Nehari, Z. (1976), 'A property of convex conformal maps', *J. Analyse Math.* **30**, 390–393.
URL: <https://doi-org.uai.idm.oclc.org/10.1007/BF02786725>
- Nehari, Z. (2012), *Conformal Mapping*, Dover Books on Mathematics, Dover Publications.
URL: <https://books.google.cl/books?id=ZEVosWb9CnAC>
- Osgood, B. (1998), Old and new on the Schwarzian derivative, in 'Quasiconformal mappings and analysis (Ann Arbor, MI, 1995)', Springer, New York, pp. 275–308.
- Suita, N. (1996), 'Schwarzian derivatives of convex functions', *J. Hokkaido Univ. Ed. Sect. II A* **46**(2), 113–117.
- Yamashita, S. (1999), 'Norm estimates for function starlike or convex of order α ', *Hokkaido Mathematical Journal* **28**, 217–230.